The monograph is devoted to the functional properties of three-valued logics. Original approach to the problem of the relation between different three-valued logics is proposed. Different classes of three-valued logics are presented as the lattices w.r.t. relation of functional inclusion one logic to another. The lattices of implicative extensions of regular Kleene's logics and the lattices of *p*-logic are presented.

Russian Academy of Science
Institute of Philosophy

Natalya Tomova

NATURAL THREE-VALUED LOGICS: FUNCTIONAL PROPERTIES AND RELATIONS

Moscow
2012

Российская Академия Наук
Институт философии

Н.Е. Томова

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И ОТНОШЕНИЯ

Москва
2012

УДК 164.3
ББК 15.13
Т 56

В авторской редакции

Рецензенты

доктор филос. наук *К.И. Бахтияров*
доктор техн. наук *В.К. Финн*

Т 56 **Томова Н.Е.** Естественные трехзначные логики: функциональные свойства и отношения [Текст] / Н.Е. Томова; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М. : ИФРАН, 2012. – 89 с. ; 20 см. – Библиогр.: с. 86–89. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0229-4.

Монография посвящена функциональным свойствам трехзначных логик. Предложен оригинальный подход к рассмотрению вопроса о взаимоотношении между различными трехзначными логиками, различные классы трехзначных логик представлены в виде решеток относительно свойства функциональной вложимости. Построены решетки импликативных расширений регулярных логик Клини, а также решетки p-логик.

ISBN 978-5-9540-0229-4

Содержание

Contents

Введение

Даная книга посвящена проблеме взаимоотношения трехзначных логик. В ней представлена своеобразная классификация наиболее важных классов трехзначных систем относительно их функциональных свойств.

Разработка трехзначных логик послужила началом развития одного из центральных разделов современной неклассической логики – многозначной. Возникновение неклассических логик, и в том числе многозначных, было продиктовано актуальными проблемами логики и философии. Системы многозначных логик, и их подкласс – трехзначные логики, строились на основании пересмотра принципов классической логики и применялись для решения конкретных философских и познавательных задач.

Критика принципа двузначности имела различные предпосылки и основания, что привело к возникновению различных трехзначных систем. Так, первая трехзначная логика – логика Лукасевича (1920 г.) была построена в связи с анализом проблемы логического статуса высказываний о будущих случайных событиях и связанной с ней проблемой логического фатализма. Другие системы трехзначных логик возникли в связи с необходимостью преодоления логических и семантических парадоксов. Так появились первые логики бессмысленности. Построение паранепротиворечивых систем в рамках трехзначной логики было продиктовано необходимостью корректной работы с противоречивыми высказываниями. Особый класс среди трехзначных логик представляют регулярные логики Клини. Они конструировались и использовались в качестве аппарата для работы с неразрешимыми утверждениями (утверждениями, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть).

Таким образом, широкий класс проблем, решение которых связано с отказом от классической логики и ее принципов, приводит к многообразию трехзначных логик, принципиально различных по своим свойствам и основаниям. В связи с множественностью и разнообразием логических систем возникает проблема изучения взаимоотношений между различными трехзначными логиками, их систематизации и упорядочивания в виде определенных структур.

В рамках данной книги нас будут интересовать функциональные свойства трехзначных логик. На этом основании будет предложен оригинальный подход к рассмотрению вопроса о взаимоотношении между различными трехзначными логиками, – различные классы трехзначных логик будут представлены в виде решеток относительно свойства функциональной вложимости. Особенностью и новизной нашего подхода является то, что в качестве исходного базиса взят класс регулярных логик Клини. Далее эти логики расширяются посредством добавления связки импликации со строго заданными естественными свойствами. Такую импликацию мы назвали *естественной импликацией*. Рассматриваются структуры, которые образуют эти импликативные расширения. Далее в качестве обобщения этот подход применяется к классу т. н. *p-логик*.

Необходимо отметить, целью настоящей работы не является рассмотрение всех существующих трехзначных логик. Во-первых, исследуются только **C**-расширяющие системы, т. е. логики с такими связками, ограничение которых на множестве $\{0,1\}$ дают классические связки. Во-вторых, в предложенном исследовании ключевое значение имеет понятие *естественной* импликации, и на этом основании выделяется класс *естественных* трехзначных логик, т. е. трехзначных логик с естественной импликацией. За исключением самих регулярных логик Клини, все рассмотренные нами трехзначные логики являются *естественными* в указанном смысле. В этой связи интересна статья А.Аврона [33], в которой он выделяет класс *естественных* (*natural*) трехзначных логик, в его работе ключевую роль играет отношение логического следования. В класс естественных логик вошла только сильная логика Клини и ее расширения.

Итак, первая глава книги посвящена исследованию основных источников появления трехзначности в логике, здесь рассмотрены наиболее известные представители семейства трехзначных логик. В рамках этой же главы отдельно останавливаемся на обзоре результатов в области взаимоотношения трехзначных логик и их систематизации.

Во второй главе предлагается рассмотреть семейство регулярных логик Клини в качестве основания для построения других трехзначных логик. Последние представлены как расширения регулярных логик Клини, а именно, как импликативные расширения сильной, слабой и промежуточной регулярных логик. Далее будет показано, что импликативные расширения регулярных логик Клини образуют семиэлементную решетку относительно свойства функциональной вложимости.

Третья глава посвящена анализу функциональных свойств *p*-логик. Вводится понятие *стандартной p-логики*, рассматриваются свойства сильной, слабой, промежуточной стандартных *p*-логик, а также импликативные расширения сильной и слабой стандартных *p*-логик. Решается задача обобщения понятия *p*-логики и рассмотрения класса *естественных p-логик*. Представлены решетки *p*-логик.

ГЛАВА 1. ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ

Данный раздел будет посвящен логико-философскому анализу истории возникновения трехзначных логик. Также мы представим обзор наиболее значимых результатов в области изучения функциональных свойств трехзначных логик и их взаимоотношений. Предварительно определим терминологию нашего исследования.

1.1. Основные понятия и определения

Решение проблемы взаимоотношений между различными трехзначными логиками, их систематизации и упорядочивания в виде определенных структур напрямую зависит от того, какой трактовки термина «логика» мы будем придерживаться. Это непосредственно определяет методологию исследования.

Современное определение многозначной логики было введено в Советском Союзе и связано с работами А.В.Кузнецова, С.В.Яблонского, В.Б.Кудрявцева, в которых многозначная логика трактуется с функциональной точки зрения. И сейчас под многозначной логикой принято понимать любое непустое множество функций на данном k-элементном множестве, замкнутое относительно операции суперпозиции. Такое понимание многозначной логики находим у немецкого профессора Дьентлайна Ло (Dientline Lau) в его фундаментальной монографии, вышедшей в 2006 г. и представляющей собой базовый курс по конечнозначной логике.

В данной работе под логикой будем понимать *некоторое конечное множество трехзначных функций, задаваемых таблично.* По существу, такое понимание трехзначной логики мы находим у С.Клини в книге «Введение в метаматематику», в § 64, где определение регулярных логик заключалось в описании их связок с помощью истинностных таблиц.

Логические связки являются знаками истинностных функций.

Функциональная трактовка термина «логика» была выбрана, поскольку, во-первых, существуют логики, не имеющие тавтологий при одном выделенном значении (класс регулярных логик Клини), во-вторых, такой подход удобен для сравнения различных логик.

Укажем некоторые базовые понятия, а также ряд ключевых определений, существенно используемых на протяжении всей книги.

Функцией трехзначной логики называется произвольная функция $f(x_1,\ldots, x_n)$ от любого конечного числа переменных, областью определения которых и областью значения самой функции является множество $V_3 = \{0, {}^1/_2, 1\}$. Множество всех трехзначных функций обозначается посредством P_3[1].

Пусть F – некоторое непустое множество 3-значных функций. $\mathrm{F} = \{f_1(x_1,\ldots, x_{n_1}), f_2(x_1,\ldots, x_{n_2}), \ldots, f_s(x_1,\ldots, x_{n_s}),\ldots\}$.
Введем понятие формулы над множеством F. Это понятие определяется индуктивно.

(1) Выражения $f_i(x_1,\ldots, x_{n_i})$ (т.е. знак функции, левая скобка, переменные функции в их порядке, правая скобка) являются формулами над F.
(2) Если $A_1,\ldots, A_{n_i}$ – либо переменные, либо формулы над F, то $f_i(A_1,\ldots, A_{n_i})$ – формула над F; выражения $A_1,\ldots, A_{n_i}$ (отличные от символов переменных) называются подформулами формулы F. [11, с. 13].

Так как мы можем определить значение формулы A (опираясь на индуктивное определение формул) на любом наборе переменных, то тем самым мы сопоставим этой формуле некоторую функцию $f(x_1,\ldots, x_n)$. Про функцию, сопоставленную формуле, говорят, что она *реализуется* или *выражается* этой формулой.

[1] P_3 – класс функций, соответствующий трехзначной логике Поста.

Функция f *выразима* (*определима*) через функции множества F, если существует формула над F, которая реализует функцию f.

Если функция f реализуется формулой, которая составлена только из символов функций $f_1,\ldots,f_k$ (а также символов переменных), то функция f является *суперпозицией* функций $f_1,\ldots,f_k$, а процесс получения функции f из $f_1,\ldots,f_k$ называется операцией суперпозиции [28].

Система функций $F = \{f_1,\ldots,f_k\ldots\}$ из P_3 называется *функционально полной*, если любая функция из P_3 представима посредством суперпозиций функций из системы F.

Система F функций называется *функционально предполной* в P_3, если F представляет не полную систему, но добавление к F любой функции f такой, что $f \in P_3$ и $f \notin F$, преобразует F в полную систему.

Итак, поскольку связки являются знаками истинностных функций, то, соответственно, если говорим о том, что некоторая связка α определима посредством некоторого множества связок M (например, $M = \{\beta_1,\ldots, \beta_n\}$), то имеем в виду, что функция, знаком которой является α, выразима через функции, знаками которых являются связки из M.

Таким образом, имеем следующие определения 1-5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Трехзначная логика S – *функционально полна*, если всякая связка трехзначной логики определима посредством связок S. Или, другими словами, если система функций S, соответствующая логике S, является функционально полной в P_3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Трехзначная логика S – *функционально предполна*, если она не является функционально полной, но добавление к S связки, которая не выразима посредством исходных связок логики S, превращает S с этой связкой в функционально полную логику. Или, другими словами, если система функций S, соответствующая логике S, является функционально предполной в P_3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Логика S *функционально вложима* в логику S′, если все связки логики S могут быть определены посредством связок логики S′.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Логика S *функционально эквивалентна* логике S′, если

(1) логика S функционально вложима в логику S′ и
(2) логика S′ функционально вложима в логику S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Собственным расширением логики* S назовем некоторую логику S′ со множеством связок, которое представляет собой пополнение исходного множества связок логики S связкой, которая не может быть определена посредством исходных связок системы S.[2]

Кроме того, в ходе изложения будут привлекаться элементы теории решеток [3]:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Отношения, обладающие свойством рефлексивности ($x \leq x$), антисимметричности (из $x \leq y$ и $y \leq x$ следует $x = y$), транзитивности (из $x \leq y$ и $y \leq z$ следует $y \leq z$), называются *отношениям частичного порядка*. Множества, на которых заданы такие отношения – *частично упорядоченные множества* (кратко *ч.у. множествами*).

Определим *sup* и *inf* в произвольном ч.у. множестве (т. е. в $< L, \leq >$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $H \subseteq L$ и $x \in L$. Тогда x называется *верхней границей* подмножества H, если $h \leq x$ для всех $h \in H$. Верхняя граница x подмножества H называется его *верхней гранью* или *супремумом*, если $x \leq y$ для любой верхней границы y подмножества H. Понятие *нижней границы* и *инфимума* определяется аналогично (двойственным образом).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Ч.у. множество $< L, \leq >$ называется решеткой, если для всех $x,y \in L$, существуют $sup\{x,y\}$ и $inf\{x,y\}$.

[2] Далее, говоря о расширении некоторой трехзначной логики, будем иметь в виду «собственное расширение некоторой трехзначной логики», слово «собственное» для удобства будем опускать.

1.2. Возникновение трехзначных логик

Логика Лукасевича $Ł_3$

Универсальность принципа двузначности была подвергнута сомнению уже в античности. В 9-й главе в работе «Об истолковании» [1] Аристотель рассматривает проблему будущей случайности и ставит вопрос об истинностном статусе высказываний о будущих случайных событиях. В результате Аристотель приходит к выводу о том, что применение принципа двузначности к высказываниям о случайном будущем приводит к фаталистическим следствиям, к выводам об отсутствии свободы воли и необходимости всего происходящего (логической предопределенности всех событий).

В XX в. Ян Лукасевич возрождает дискуссию о будущих случайных событиях в связи с проблемой детерминизма. Отталкиваясь от идей Аристотеля, Ян Лукасевич приходит к выводу, что высказывания о случайном будущем нельзя оценить как истинные или ложные. Сам Лукасевич о таких высказываниях говорит: «…высказывания, которые не являются ни истинными, ни ложными, а лишь только неопределенными. Таковы все высказывания о будущих случайных событиях, которые в настоящее время еще не предопределены … этим высказываниям онтологически не соответствует ни бытие, ни небытие, но лишь возможность. Неопределенные высказывания, которым онтологически соответствует возможность, имеют третье логическое значение». Это философское обоснование введения в логику третьего истинностного значения было представлено в знаменитой статье «О детерминизме» [10]. Итак, проблема высказываний о будущих случайных событиях была решена введением для них третьего истинностного значения, которое интерпретируется как «безразлично», «недетерминировано», «возможно», и в отличие от «истина»(«1») и «ложь»(«0») обозначается «½».

В 1920 г. Ян Лукасевич конструирует первую трехзначную логику. Решая проблему определения логических связок для своей трехзначной логики, Лукасевич в качестве исходных логических связок берет отрицание $\sim$ и импликацию $\rightarrow$, для которых сохраняются классические значения, когда аргументы оцениваются с точки зрения истинности или ложности[3]. Для случаев, когда встречается третье истинностное значение, доопределение связок происходит следующим образом:

$$(1 \to ½) = (½ \to 0) = ½,$$
$$(0 \to ½) = (½ \to ½) = (½ \to 1) = 1,$$
$$\sim ½ = ½.$$

Посредством исходных связок по определению (здесь и далее будем обозначать как $=_{Df}$) вводятся другие логические связки:

$$p \vee q =_{Df} (p \to q) \to q$$
$$p \wedge q =_{Df} \sim(\sim p \vee \sim q)$$
$$p \equiv q =_{Df} (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Почему доопределение осуществляется именно так, Лукасевич не объясняет ни в одной из своих работ. К сожалению, можно только предполагать, из каких мотивов исходил Лукасевич, определяя свою импликацию. В связи с этим возникли трудности с интуитивным пониманием $\mathbf{Ł_3}$. Однако, определение импликации именно таким образом, обусловило важные особенности $\mathbf{Ł_3}$.

Итак, имеем следующие истинностные таблицы для логических связок:

p	$\sim p$
1	0
$^1/_2$	$^1/_2$
0	1

$\to$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	1	$^1/_2$
0	1	1	1

[3] Таким образом, полученные трехзначные связки являются обобщением классических связок.

$\vee$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	0	0	0

$\equiv$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	1

Ранее было отмечено, что в качестве исходных связок для $\mathbf{Ł_3}$ достаточно взять $\sim$ и $\rightarrow$. Таким образом, множество функций $\{\sim, \rightarrow\}$ соответствует трехзначной логике Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$.

Введение в логику третьего истинностного значения имело очень важные последствия. Не все законы классической логики имеют место в $\mathbf{Ł_3}$.

Более того, с функциональной точки зрения принципиально важным является следующее свойство логики Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$: в отличие от классической двузначной логики, которая является функционально полной[4], логика $\mathbf{Ł_3}$ обладает свойством функциональной предполноты. Соответствующая теорема доказана В.К.Финном в [22].

Регулярные логики Клини

Трехзначная логика Клини $\mathbf{K_3}$ была построена в 1938 г. Предпосылки ее возникновения связаны с развитием теории рекурсивных функций. В своем обосновании введения третьего истинностного значения С.Клини исходит из того, что существуют такие математические утверждения, которые, хотя и являясь истинными или ложными, не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты. Именно для таких утверждений Клини вводит третье истинностное значение «**u**»[5], которое трактует как «неопределенно», «неизвестно»,

[4] То есть любая связка двузначной логики может быть выражена, например, с помощью отрицания и импликации.

[5] С.Клини использует следующие обозначения для истинностных значений: **t** («истина»), **f** («ложь») и **u** («не определено») [8, с. 296]. Для удобства далее будем обозначать истинностные значения посредством «1», «0», «$^1/_2$» как у Лукасевича.

«неразрешимо», и функция этого значения указывать на частичную нехватку, отсутствие информации о том, какое значение принимает данное утверждение «истина» или «ложь».

Проблему определения трехзначных логических связок С.Клини решает, предложив регулярные таблицы для них. В [8] автор подробно разбирает, с чем это связано.

Клини пишет о существовании разрешающей процедуры для любого примитивно- или обще-рекурсивного предиката, однако если Q(x) – частично-рекурсивный предикат, то может не существовать алгоритм для решения, определено ли Q(x) при данном x. Для того чтобы связки были частично-рекурсивными операторами, регулярность является необходимым условием. Для «регулярности» Клини дает операциональное определение. Таблицы для связок должны быть регулярными в следующем смысле:

> «*данный столбец (строка) содержит* ***t*** *в строке (столбце) для* ***и*** *только при условии, что этот столбец (строка) состоит целиком из* ***t****; аналогично для* ***f***» [8, с. 298].

Клини конструирует сильную регулярную логику $\mathbf{K_3}$, в которой связки определяются следующими таблицами:

p	$\sim p$
1	0
$^1/_2$	$^1/_2$
0	1

$\vee$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	0	0	0

$\supset$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	1	1

$\equiv$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	$^1/_2$	1

Как пишет Клини, «эти таблицы однозначно определяются как самые сильные из возможных регулярных расширений классических двузначных таблиц, т. е. они регулярны и имеют **t** или **f** в каждом месте, где какое-либо регулярное расширение 2-значных таблиц может содержать **t** или **f** (что именно: **t** или **f**, – это определено однозначно)» [8, с. 298].

С содержательной точки зрения, алгоритм интерпретации, например, конъюнкции выглядит так: информация, состоящая в том, что *p* или *q* есть «$^1/_2$», не может быть использована (поскольку «$^1/_2$» означает отсутствие информации об истинностном статусе высказывания). $p \wedge q$ оценивается как «ложь», если *p* ложно (при этом не важно, какого значение *q*) или *q* ложно (при этом не важно, какого значение *p*); как «истина», если *p* и *q* оба истинны; определена только в этих случаях (а поэтому не определена в остальных). Таким образом, $p \wedge q$ в $\mathbf{K_3}$ имеет ту же самую истинностную таблицу, что и $p \wedge q$ в $\mathbf{Ł_3}$. Совпадают истинностные таблицы также для $p \vee q$ и $\sim p$. Таким образом, $\mathbf{K_3}$ функционально вложима в $\mathbf{Ł_3}$.[6]

Другой пример регулярных таблиц – слабые регулярные таблицы, они составлены в соответствии с требованием сохранения значения «не определено» на всех последующих уровнях алгоритма и определяют слабую регулярную логику Клини $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$.

p	$\sim p$
1	0
$^1/_2$	$^1/_2$
0	1

$\cup$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	0

$\cap$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	$^1/_2$	0

[6] Это имеет место, поскольку в качестве исходных связок в $\mathbf{K_3}$ достаточно взять, например, $\sim$ и $\vee$.

$\supset$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	1

$\equiv$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	$^1/_2$	1

С.Клини представил в своей книге [8] две трехзначные регулярные логики – сильную регулярную логику $\mathbf{K_3}$ и слабую регулярную логику $\mathbf{K}_3^w$. Его определение этих логик заключалось в описании их связок с помощью таблиц истинности. В данном контексте логика – некоторое конечное множество логических связок, обладающих определенным свойством и задаваемых таблично. При описании регулярных логик Клини определял пять логических связок – отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквиваленцию, однако заметим, что во всех регулярных логиках Клини в качестве исходных логических связок достаточно взять отрицание и дизъюнкцию (или конъюнкцию), поскольку все остальные связки стандартным образом выразимы через указанные. Однако для дальнейшего удобства в качестве исходных в каждой из регулярных логик были взяты три связки: отрицание, дизъюнкция и конъюнкция.

Таким образом, множество функций $\{\sim, \vee, \wedge\}$ соответствует трехзначной логике $\mathbf{K_3}$, а множество функций $\{\sim, \cup, \cap\}$ соответствует трехзначной логике $\mathbf{K}_3^w$.

Однако помимо сильной и слабой регулярных логик Клини имеются и другие отличные от них регулярные логики. На возможность их существования указал М.Фиттинг [40]. В [41] он описал одну из таких логик – логику **Lisp**, названную им «промежуточной» между сильной и слабой логиками Клини. Допустим, нам необходимо оценить выражение $p \wedge q$. Это необходимо делать последовательно, скажем, слева направо, так что предложение p мы оцениваем первым. Если p приписано значение «ложь», то работа по приписыванию значений останавливается и всему выражению приписывается значение «ложь». Если p интерпретируется как «истина», то далее проводится приписывание значения q, и значение q становится значением всего выражения $p \wedge q$. Если p «не определено», то всему выражению приписывается значение ½, вне зависимости от того, какого значение q.

Это ассиметричная или позиционная логика. Например, если p – «ложно», а q – «не определено», то выражение $p \wedge q$ будет ложным, а $q \wedge p$ примет значение $^1/_2$, т. е. логическая связка $\wedge$ (а также $\vee$) некоммутативна.

Связки логики **Lisp** (она обозначается посредством $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$) представлены в работе [51]) следующим образом:

p	$\sim p$
1	0
$^1/_2$	$^1/_2$
0	1

$\vee^{\rightarrow}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge^{\rightarrow}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	0	0

$\supset^{\rightarrow}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	1	1

$\equiv$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	$^1/_2$	1

Связки другой промежуточной регулярной логики **TwinLisp** **(**она обозначается посредством $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$**)** определяются следующим образом [51]:

p	$\sim p$
1	0
$^1/_2$	$^1/_2$
0	1

$\vee^{\leftarrow}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge^{\leftarrow}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	0	$^1/_2$	0

$\supset^{\leftarrow}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	1

$\equiv$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	$^1/_2$	1

Таким образом, множество функций $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}\}$ соответствует трехзначной логике $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, а множество функций $\{\sim, \vee^{\leftarrow}, \wedge^{\leftarrow}\}$ соответствует трехзначной логике $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$.

В рамках данного раздела книги ограничимся описанием того, как именно и в связи с чем были построены все трехзначные регулярные логики. Подробному описанию их свойств и взаимоотношений посвятим начало второй главы.

Другие трехзначные логики

Отметим также ряд других важных предпосылок, послуживших основанием для конструирования систем трехзначных логик.

Как известно, в начале XX в. критика классической логики осуществлялась в том числе в связи с кризисом в основаниях математики. Особо остро встала проблема преодоления логических и семантических парадоксов. Определилось несколько методов элиминации антиномий.

В рамках программы математического интуиционизма возникновение парадоксов связывалось с неограниченным применением в математических рассуждениях классических законов (исключенного третьего, снятия двойного отрицания и др.), что способствовало доказательству неконструктивных утверждений. В 1930 г. А.Гейтингом [45] была сформулирована трехзначная «интуиционистская» логика $\mathbf{G}_3$, в которой определения связок давалось таким образом, что наиболее известные «неконструктивные» законы и правила не имеют места.

В качестве логических связок в $\mathbf{G}_3$ берутся $\rceil$, $\Rightarrow$, $\vee$ и $\wedge$. Таблицы истинности для $\vee$ и $\wedge$ совпадают с таблицами для этих связок в логике $\mathbf{Ł}_3$. Остальные связки определяются следующим образом:

p	$\rceil p$
1	0
$^1/_2$	0
0	1

$\Rightarrow$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	1	0
0	1	1	1

Итак, множество функций $\{\rceil, \Rightarrow, \vee, \wedge\}$ соответствует трехзначной логике $\mathbf{G}_3$.

Другие исследователи, пытаясь устранить парадоксы, пошли путем отказа от классической логики, пересмотрев принцип двузначности и поставив под вопрос возможность истинностной оценки для парадоксальных утверждений. Одним из первых такой способ преодоления парадоксов предложил русский логик Д.А.Бочвар. В 1938 г. в связи с проблемой разрешения парадоксов классической математики им была построена трехзначная логика $\mathbf{B}_3$ [2]. В данной системе третье истинностное значение надо интерпретировать не столько как промежуточное между истиной и ложью, сколько как парадоксальное значение или даже как «бессмыслицу». Анализ логических и семантических парадоксов состоит в доказательстве бессмысленности парадоксальных высказываний. Поэтому логику Бочвара и называют логикой бессмысленности.

В качестве исходных связок в $\mathbf{B}_3$ выступают $\sim$, $\vdash$, $\cap$, где $\sim$ и $\cap$ определяются так же как в слабой логике Клини, а $\vdash$ называется внешним утверждением и задается таблицей:

p	$\vdash p$
1	1
$^1/_2$	0
0	0

Существенной особенностью логики Бочвара является то, что ее язык имеет два уровня и состоит из внутренних логических связок и внешних. Таблицы для внутренних связок строятся в соответствии со следующим правилом: приписывание хотя бы одному из аргументов значения $^1/_2$ оказывается достаточным для того, чтобы вся формула имела значение $^1/_2$. Такое свойство внутренних связок является следствием интерпретации $^1/_2$ как «бессмысленность», т. е. бессмысленность влечет за собой бессмысленность. Внутренние связки логики Бочвара стандартным образом определяются с помощью отрицания (~) и конъюнкции (∩) и, таким образом, совпадают со связками слабой логики Клини $\mathbf{K}_3^w$.

Особую роль при анализе парадоксов в $\mathbf{B}_3$ играют внешние связки, которые определяются следующим образом: особенностью таблиц истинности для этих связок является то, что внутри них имеются только истинностные значения 1 и 0, причем сохраняются классические значения, когда аргументы принимают значение из множества {0,1} [2]. Внешние связки определяются посредством исходных связок $\mathbf{B}_3$.

$$\sim^{\vdash} p =_{Df} \sim\vdash p \text{ есть } \lceil p,$$
$$p \cup^{\vdash} q =_{Df} \vdash p \cup \vdash q,$$
$$p \cap^{\vdash} q =_{Df} \vdash p \cap \vdash q,$$
$$p \supset^{\vdash} q =_{Df} \vdash p \supset \vdash q,$$
$$p \equiv^{\vdash} q =_{Df} \vdash p \equiv \vdash q.$$

Приведем таблицы истинности, которыми задаются внешние связки $\mathbf{B}_3$:

p	$\sim^{\vdash} p$
1	0
$^1/_2$	1
0	1

$\cup^{\vdash}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	0	0
0	1	0	0

$\cap^{\vdash}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	0	0	0
0	0	0	0

$\supset^{\vdash}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	1	1	1
0	1	1	1

$\equiv^{\vdash}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	0	1	1
0	0	1	1

Среди внешних связок Бочвар особо выделяет так называемы J_i-операторы, которые имеют в его построениях принципиальное значение[7]:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, \textit{если } x = i \\ 0, \textit{если } x \neq i. \end{cases}$$

Таблицы истинности для J_i-операторов выглядят так:

	J_0	$J_{½}$	J_1
1	0	0	1
$^1/_2$	0	1	0
0	1	0	0

Таким образом, J_0 есть $\rceil$, J_1 есть $\vdash$, $J_{½}$ есть $\downarrow$. Связка $\downarrow$ называется «оператор бессмысленности».

[7] Заметим, с содержательной точки зрения, наличие в сигнатуре той или иной логики всех J_i-операторов интуитивно означает возможность говорить на языке данной логики о каждом из ее истинностных значений. Логику, обладающую данным свойством, называют истинностно полной. Формально, истинностная полнота представляет собой функциональную выразимость всех J_i-операторов, т. е. так называемых характеристических функций для каждого истинностного значения. Например, если бы у нас имелась трехзначная логика с истинностными значениями «ложь» (0), «истина» (1) и «бессмыслица» (½) и не был бы выразим $J_{½}$-оператор, то мы бы не смогли на языке этой логики высказать утверждение о «бессмысленности» какого-либо предложения.

В соответствии с идеей Бочвара, парадоксальная формула принадлежит внутреннему языку, а утверждение ее бессмысленности внешнему.

Далее, рассмотрим также еще две другие логики бессмысленности – логику Холдена $\mathbf{H_3}$ и логику Эббинхауза, поскольку в последующих главах работы эти системы будут встречаться.

Независимо от Бочвара Холден построил трехзначную логику $\mathbf{H_3}$ (Холден обозначает ее посредством **C**) [44], которую он так же, как и Бочвар, использовал для анализа семантических парадоксов. В качестве исходных связок в $\mathbf{H_3}$ выступают $\sim$, $\cap$, $J_{½}$.

Трехзначная логика Г.Эббинхауза [38] $\mathbf{E_3}$ получается, если к исходным связкам логики $\mathbf{B_3}$ добавить дизъюнкцию $\vee^e$, которая имеет следующую таблицу истинности:

$\vee^e$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	0	0

На самом деле, логика $\mathbf{E_3}$ есть расширение логики $\mathbf{B_3}$ дизъюнкцией Собочиньского из его трехзначной логики $\mathbf{S_3}$ [64].

На наш взгляд, еще одним немаловажным источником появления целого класса трехзначных логик является пересмотр налагаемого классической логикой запрета «пресыщенных оценок» (т. е. допущения ситуации, когда высказывание одновременно может быть оценено как истинное и как ложное), этот запрет является следствием принятия принципа двузначности. Допущение возможности пресыщенных оценок приводит к конструированию паранепротиворечивых логик, последние позволяют создать дедуктивный аппарат, который дает возможность в конкретных теориях корректно работать с парадоксальными высказываниями, но вместе с тем, не превращая теории в тривиальные.

Таким образом, в паранепротиворечивых логиках третье промежуточное истинностное значение интерпретируется как «антиномично», «парадоксально», «противоречиво».

Исторически самой первой трехзначной паранепротиворечивой логикой является логика, представляющая собой сильную логику Клини $\mathbf{K_3}$, взятую с двумя выделенными значениями. В качестве паранепротиворечивой предложил ее использовать Ф.Асеньо [31], позже эту систему детально разрабатывал Г.Прист [57], [58], им она обозначена как **LP**.

В рамках нашего исследования особую роль играют две другие наиболее известные трехзначные паранепротиворечивые логики: логика **PCont**[8] и логика Сетте $\mathbf{P^1}$.

Логика **PCont** конструируется следующим образом: к сильной логике Клини $\mathbf{K_3}$ с двумя выделенными значениями добавляется импликация Яськовского $\supset_J$ [46], которая определяется следующей таблицей истинности:

$\supset_J$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	1	1

В [62] формулируется пропозициональное исчисление $\mathbf{P^1}$, ему соответствует трехзначная логика с двумя выделенными значениями, в качестве исходных связок берутся отрицание ($\neg$) и импликация ($\supset$), которые определяются следующими истинностными таблицами:

p	$\neg p$
1	0
$^1/_2$	1
0	1

$\supset$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	1	1	0
0	1	1	1

8 Эта трехзначная логика появлялась в литературе независимым образом у разных авторов в разное время под разными названиями [30], [34], [32]. Однако систематически она была исследована Л.И.Розоноэром [12], им же дано этой системе название **PCont**.

Остальные логические связки в $\mathbf{P}^1$ выразимы посредством исходных следующим образом:

$$p \wedge q =_{Df} (((p \supset p) \supset p) \supset \neg((q \supset q) \supset q)) \supset \neg(p \supset \neg q)$$
$$p \vee q =_{Df} (p \supset \neg\neg p) \supset (\neg p \supset q)^{9}$$
$$p \equiv q =_{Df} (p \supset q) \wedge (q \supset p).$$

В заключительной главе будет описан совершенно неожиданный результат о соотношении логики Сетте и логики Бочвара.

Таким образом, описаны основные источники появления трехзначности в логике и представлены наиболее известные представители семейства трехзначных логик.

1.3. Взаимоотношение трехзначных логик: обзор основных результатов

Первой работой в области взаимоотношения трехзначных логик является работа В.И.Шестакова [25], в которой автор рассматривает «логику Клини-Бочвара» (она получается за счет комбинирования связок логики Бочвара и логики Клини), функционально эквивалентную трехзначной логике Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$. Там же автор показывает, что логика Клини и логика Бочвара функционально вложимы в $\mathbf{Ł}_3$. В другой своей работе [26] В.И.Шестаков рассматривает расширения $\mathbf{B}_3$ и $\mathbf{K}_3$ до функционально полных трехзначных логик.

В вопросах взаимоотношения трехзначных логик, выразимости в них связок важное значение имеет работа В.К.Финна [23]. В этой работе впервые показывается, как посредством сильных связок Клини можно определить слабые. Здесь же, автором представлены своеобразные нормальные формы для логики $\mathbf{B}_3$, посредством которых можно представить любую логическую связку этой логики. Заметим, что наличие таких форм для связок той или иной логической системы имеет принципиально важное значение при изучении взаимоотношений логических систем,

[9] Заметим, что дизъюнкцию логики Сетте можно определить так:
$$p \vee q =_{Df} ((p \supset q) \supset q).$$

например, при доказательстве того, что одна трехзначная логика не является функционально вложимой в другую. В этой же работе приводится аксиоматизация и алгебраизация некоторых трехзначных систем. В связи с логикой Бочвара $\mathbf{B_3}$ упоминается трехзначная логика Холдена, показывается, что последняя функционально вложима в $\mathbf{B_3}$. В работе [24] описаны 11 предполных класов логики Бочвара. Показано, что логика Холдена функционально вложима в один из них.

Далее, в работе [42] представлена серия трехзначных (а также четырехзначных) систем, названных логиками значения (significance); истинностные значения, отличные от истины и лжи, в них интерпретируется либо как неполнота информации, либо как незначимость. Но в этой работе лишь перечисляются системы, отсутствует формальное определение понятия «логика значения». Этот недостаток устраняется в работе [21] (См. также [39]). Здесь же представлена классификация трехзначных логик значения, и в качестве основания выступают алгебраические семантики соответствующих логик. В качестве подкласса логик значения выделяется класс логик бессмысленностного типа. В свою очередь логики бессмысленностного типа делятся на два основных подкласса: логики сильно бессмысленностного типа и логики слабо бессмысленностного типа. Характерными представителями первого подкласса являются трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B_3}$ и трехзначная логика Холдена $\mathbf{H_3}$. Здесь промежуточное значение понимается как «самая сильная» незначимость (бессмыслица). Среди логик слабо бессмысленностного типа наиболее интересным представителем является трехзначная логика Эббинхауза $\mathbf{E_3}$, которая по своим функциональным свойствам является промежуточной между $\mathbf{B_3}$ и $\mathbf{Ł_3}$. Что касается самой $\mathbf{Ł_3}$, то в предложенной классификации она вообще не является логикой значения и называется логикой неопределенностного типа.

Интересный результат в области взаимоотношений трехзначных логик и их систематизации принадлежит А.Аврону [33]. Здесь выделяется класс так называемых *естественных* трехзначных логик, представляющих собой расширение логики Клини $\mathbf{K_3}$. Это логики $\mathbf{K_3}$, $\mathbf{Ł_3}$, **LPF**, $\mathbf{RM_3}$ и **PCont**. Приводятся доказательства функциональной эквивалентности некоторых систем: $\mathbf{Ł_3}$ и **LPF,** $\mathbf{RM_3}$ и **PCont**. Однако основное внимание уделено отношению логического следования в каждой из этих систем, приводится секвенциальная формулировка этих систем со свойством устранимости сечения. Заметим, в эту классификацию не попадает такая известная логика, как трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B}_3$, являющаяся расширением слабой логики Клини.

Взаимоотношениям внутри класса трехзначных регулярных логик Клини посвящена статья Е.Ю.Комендантской [9], где взаимоотношение между трехзначными регулярными логиками Клини представлено в виде четырехэлементной решетки.

Таким образом, исследования в области изучения взаимоотношения трехзначных логик, их систематизации ведутся уже достаточно давно и достигнуты определенные результаты. Однако, на наш взгляд, эта тема по-прежнему актуальна и недостаточно разработана в том плане, что в литературе не находим решения задачи представления *различных* трехзначных логик в виде решеток относительно свойства функциональной вложимости одной трехзначной логики в другую.

ГЛАВА 2. РЕШЕТКИ ИМПЛИКАТИВНЫХ РАСШИРЕНИЙ РЕГУЛЯРНЫХ ЛОГИК КЛИНИ

2.1. Свойства регулярных логик Клини и их взаимоотношения

В предыдущей главе был представлен класс трехзначных регулярных логик Клини. В качестве регулярных логик рассматриваются логики вида: $\{\sim, \vee, \wedge\}$, где $\sim$ – регулярное отрицание, $\vee$, $\wedge$ – регулярные дизъюнкция и конъюнкция соответственно.

Рассмотрим вопрос взаимоотношения регулярных логик Клини.

Первый результат в области взаимоотношения регулярных логик был получен В.К.Финном. В работе [23, с. 425] он определил слабые связки Клини через сильные:

$$p \cap q =_{Df} (p \wedge q) \vee (p \wedge {\sim}p) \vee (q \wedge {\sim}q).$$

Также утверждается, что обратное – определение сильных связок посредством слабых – не может быть осуществлено. Таким образом, $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ функционально вложима в $\mathbf{K_3}$, т. е. $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}} \subset \mathbf{K_3}$.

Далее, в работе [9, с. 125] доказано, что логики **Lisp** и **TwinLisp** являются промежуточными между сильной и слабой логиками Клини, т. е. $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}} \subset \mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ $(\mathbf{K}_3^{\leftarrow})$ и $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ $(\mathbf{K}_3^{\leftarrow}) \subset \mathbf{K_3}$. Обратное же не имеет места, т. е. $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ $(\mathbf{K}_3^{\leftarrow}) \not\subset \mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ и $\mathbf{K_3} \not\subset \mathbf{K}_3^{\rightarrow}(\mathbf{K}_3^{\leftarrow})$. Кроме того, в этой же работе доказана теорема о функциональной эквивалентности логики **Lisp** и **TwinLisp**[10].

[10] В силу функциональной эквивалентности логик **Lisp** и **TwinLisp**, далее достаточно будет рассмотреть одну из них.

Существенной особенностью всех трехзначных регулярных логик является то, что при одном выделенном значении 1 в этих логиках класс тавтологий пуст. Это очевидно, поскольку все регулярные связки сохраняют значение $^1/_2$ при значении аргументов $^1/_2$. Во всех этих системах связка импликации не присутствует в качестве исходной связки, а вводиться по определению $p \supset q$ как $\sim p \vee q$. Но эта связка импликации такова, что ни правило *modus ponens*, ни теорема дедукции не имеют места. Если допустить, что в рассматриваемых регулярных логиках не одно, а два выделенных значения, 1 и $^1/_2$, то класс тавтологий совпадет со множеством общезначимых формул классической логики $\mathbf{C_2}$, но несложно заметить, что правило *modus ponens* не сохраняет тавтологию.

Однако возникает вопрос, что получится, если регулярные логики расширить за счет добавления связки импликации, обладающей некоторыми «хорошими» свойствами? Например, мы знаем, что трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B_3}$ [2] есть слабая логика Клини $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ с импликацией $\rightarrow_5$[11] , а при построении известной паранепротиворечвой логики **PCont** [12] берется сильная регулярная логика Клини $\mathbf{K_3}$ с импликацией $\rightarrow_{21}$. Знаменитую трехзначную логику Лукасевича можно представить как $\mathbf{K_3} + \rightarrow_2$. Указанные три логики являются наиболее известными представителями семейства трехзначных логик. См. подробно об этом в [7].

Представляет интерес систематически рассмотреть импликативные расширения всех трех регулярных логик Клини и представить эти расширения в виде решетки.

2.2. Импликативные расширения регулярных логик

Определение естественной импликации

Введем определение естественной импликации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть V_3 есть $\{0, {}^1/_2, 1\}$ и D есть множество выделенных значений. Импликацию $\rightarrow$ будем называть *естественной*, если она обладает следующими свойствами:

[11] Импликации с указанными номерами см. ниже.

(1) **C**-расширение, т. е. ограничение $\rightarrow$ на подмножество $\{0,1\}$ множества V_3 есть обычная классическая связка импликация.
(2) Нормальность в смысле Лукасевича-Тарского [49, p. 134], т. е. если $x \rightarrow y \in D$ и $x \in D$, то $y \in D$.
(3) Пусть $x \leq y$, тогда $x \rightarrow y \in D$.
(4) $x \rightarrow y \in V_3$, в остальных случаях.

Тогда, согласно определению 9, при $D = \{1\}$ имеем всего 6 импликаций:

$\rightarrow$	1	$^1/_2$	0
1	1	a	0
$^1/_2$	1	1	b
0	1	1	1

где $a \in \{0, ^1/_2\}$ и $b \in \{0, ^1/_2, 1\}$.

При $D = \{1, ^1/_2\}$ имеем 24 импликации:

$\rightarrow$	1	$^1/_2$	0
1	1	b	0
$^1/_2$	a	a	0
0	1	a	1

здесь $a \in \{1, ^1/_2\}$ и $b \in \{0, ^1/_2, 1\}$.

Заметим, что 2 пары импликаций[12] совпадают как при $D = \{1\}$ так и при $D = \{1, ½\}$. Таким образом, всего 28 уникальных импликаций, удовлетворяющих условиям (1) – (4).

[12] В предложенном ниже перечне это импликации $\rightarrow_1$ и $\rightarrow_4$.

Для дальнейшего удобства перенумеруем полученные импликации и приведем соответствующие им таблицы истинности:

$D = \{1\}$

$\to_1$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	0
0	1	1	1

$\to_2$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	1
0	1	1	1

$\to_3$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	½
0	1	1	1

$\to_4$	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	0
0	1	1	1

$\to_5$	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	1
0	1	1	1

$\to_6$	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	½
0	1	1	1

$D = \{1, ½\}$

$\to_7$	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	0
0	1	1	1

$\to_8$	1	½	0
1	1	1	0
½	½	1	0
0	1	1	1

$\to_9$	1	½	0
1	1	1	0
½	½	1	0
0	1	½	1

$\to_{10}$	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	0
0	1	½	1

$\to_{11}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	0
0	1	1	1

$\to_{12}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	0
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{13}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	1	0
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{14}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	0
0	1	1	1

$\to_{15}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	1	1	0
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{16}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	0
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{17}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	1	1

$\to_{18}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	1	1	1

$\to_{19}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{20}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{21}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	1	1

$\to_{22}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	1	1	1

$\to_{23}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{24}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{25}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	1	1

$\to_{26}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	1	1	1

$\to_{27}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{28}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	1	$^1/_2$	1

Среди приведенных таблиц присутствуют таблицы, соответствующие импликациям известных трехзначных логик: $\to_3$ – импликация логики Лукасевича [50] в $\mathbf{Ł_3}$; $\to_5$ – импликация логики Бочвара [2] в $\mathbf{B_3}$; $\to_{21}$ – импликация Яськовсого [46], затем появившаяся в [34] и [12] (логика **PCont**); импликация $\to_2$ появилась независимым образом в [63] и [53] с целью сохранения стандартной теоремы дедукции в $\mathbf{Ł_3}$; $\to_{25}$ – импликация Собочиньского [64], которая появляется затем в логике **RM3** [29]. Две импликации, уже упоминаемые нами следующие: $\to_1$ – импликация логики Гейтинга $\mathbf{G_3}$ (1930 г.) и стандартная импликация Решера $\to_4$ [60]. Импликация $\to_6$ появляется в построенной дуальным образом к $\mathbf{G_3}$ паранепротиворечивой логике $\mathbf{D_3}$ [5]; импликация $\to_7$ встречается в паранепротиворечивой логике Сетте $\mathbf{P_1}$ [61]. Подробно обо всех этих логиках см. в [7].

ЗАМЕЧАНИЕ. В связи с понятием естественной импликации, интересно отметить, что в [59, p. 179–180] Е.Расева вводит понятие *импликативной логики*, откуда следует более строгое условие, чем (3), а именно:

$$(3)'\ x \leq y \text{ е.т.е. } x \to y \in D \text{ (отношение предпорядка).}$$

Но тогда из класса естественных импликаций выпадает, например, импликация $\to_{21}$ логики **PCont** и, вообще, выпадает ряд логик с хорошими *стандартными* свойствами.

Итак, если в ранее приведенном определении естественной импликации условие (3) заменить на условие (3)', то в класс естественных импликаций войдут только 4 импликации: $\to_1$, $\to_3$, $\to_4$ и $\to_6$[13].

[13] Заметим, Е.Расева рассматривала логики только с одним выделенным значением.

Интересно отметить, что в качестве примера импликативной логики по Расевой можно привести любую систему с импликацией Смайли[14]. Последнюю можно определить следующим образом:

$$x \to y = \begin{cases} 1, \textit{если } x \leq y \\ 0, \textit{в противном случае}. \end{cases}$$

Заметим, что в случае трехзначной логики, так определяется стандартная импликация Решера ($\to_4$ в нашем обозначении).

Итак, далее нас будут интересовать импликативные расширения регулярных логик Клини за счет добавления связки *естественной* импликации.

Поскольку в каждой регулярной логике в качестве исходной связки присутствует регулярное отрицание ~, поэтому прежде чем приступить к непосредственному рассмотрению импликативных расширений регулярных логик, докажем ряд утверждений относительно систем с исходными связками ~ и $\to_i$ ($1 \leq i \leq 28$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Логики со связками ~, $\to_1$ и ~, $\to_6$ функционально эквивалентны.

Доказательство. В силу определений 3 и 4, доказательство утверждения следует из соотношений.

(1) $p \to_1 q =_{Df} {\sim}q \to_6 {\sim}p$,

(2) $p \to_6 q =_{Df} {\sim}q \to_1 {\sim}p$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Логики со связками ~, $\to_3$ и ~, $\to_{12}$ функционально эквивалентны.

[14] Т. Дж. Смайли (в письме) нашел четырехзначную матрицу, которая является характеристической для $\mathbf{E}_{\mathrm{fde}}$.

Доказательство.

(1) Заметим, логика со связками ~, $\rightarrow_3$ есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$. В силу функциональной предполноты $\mathbf{Ł_3}$ [22], очевидно, что посредством ~ и $\rightarrow_3$ определима импликация $\rightarrow_{12}$[15].

(2) Покажем, что посредством множества связок $\{\sim, \rightarrow_{12}\}$ определимы связки из множества $\{\sim, \rightarrow_3\}$:

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} \sim(p \rightarrow_{12} q) \rightarrow_{12} \sim(q \rightarrow_{12} \sim p).$$

Таким образом, для логики Лукасевича имеется два функционально эквивалентных импликативно-негативных построения $\{\sim, \rightarrow_3\}$ и $\{\sim, \rightarrow_{12}\}$. Однако если в первом случае это логика с одним выделенным значением, то логика со связками ~, $\rightarrow_{12}$ есть логика с двумя выделенными значениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Логики со связками ~, $\rightarrow_5$ и ~, $\rightarrow_7$ функционально эквивалентны.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

(1) $p \rightarrow_5 q =_{Df} \sim q \rightarrow_7 \sim p$,

(2) $p \rightarrow_7 q =_{Df} \sim q \rightarrow_5 \sim p$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Логики со связками ~, $\rightarrow_{14}$ и ~, $\rightarrow_{15}$ функционально эквивалентны.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

(1) $p \rightarrow_{14} q =_{Df} \sim q \rightarrow_{15} \sim p$,

(2) $p \rightarrow_{15} q =_{Df} \sim q \rightarrow_{14} \sim p$.

---

[15] Это действительно, очевидно, поскольку следствием теоремы В.К.Финна о функциональной предполноте $\mathbf{Ł_3}$ является утверждение о том, что любая трехзначная связка, ограничение которой на множестве истинностных значений {0,1} есть классическая связка (**С**-расширяющая), может быть определена посредством связок $\mathbf{Ł_3}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Логики со связками ~, $\rightarrow_{17}$ и ~, $\rightarrow_{25}$ функционально эквивалентны.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

(1) $p \rightarrow_{17} q =_{Df} (q \rightarrow_{25} {\sim}p) \rightarrow_{25} (p \rightarrow_{25} q)$,

(2) $p \rightarrow_{25} q =_{Df} {\sim}(({\sim}q \rightarrow_{17} {\sim}p) \rightarrow_{17} {\sim}(p \rightarrow_{17} q))$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. Логики со связками ~, $\rightarrow_{18}$ и ~, $\rightarrow_{21}$ функционально эквивалентны.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

(1) $p \rightarrow_{18} q =_{Df} p \rightarrow_{21} {\sim}(q \rightarrow_{21} {\sim}p)$,

(2) $p \rightarrow_{21} q =_{Df} (q \rightarrow_{18} p) \rightarrow_{18} (p \rightarrow_{18} q)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. Логики со связками ~, $\rightarrow_{19}$ и ~, $\rightarrow_{26}$ и ~, $\rightarrow_{27}$ попарно функционально эквивалентны.

Доказательство. Сначала покажем эквивалентность логик со связками ~, $\rightarrow_{26}$ и ~, $\rightarrow_{27.}$ Это верно в силу следующих соотношений:

(1) $p \rightarrow_{27} q =_{Df} {\sim}q \rightarrow_{26} {\sim}p$,

(2) $p \rightarrow_{26} q =_{Df} {\sim}q \rightarrow_{27} {\sim}p$.

Далее покажем, что логика со связками ~, $\rightarrow_{19}$ функционально эквивалентна логике со связками ~, $\rightarrow_{27}$. Это справедливо в силу следующих соотношений:

(1) $p \rightarrow_{27} q =_{Df} p \rightarrow_{19} {\sim}(p \rightarrow_{19} {\sim}q)$,

(2) $p \rightarrow_{19} q =_{Df} p \rightarrow_{27} {\sim}(p \rightarrow_{27} {\sim}q)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. Логики со связками ~, $\rightarrow_{20}$ и ~, $\rightarrow_{22}$ и ~, $\rightarrow_{28}$ попарно функционально эквивалентны.

Доказательство. Сначала покажем эквивалентность логик со связками ~, $\rightarrow_{20}$ и ~, $\rightarrow_{28.}$ Это верно в силу следующих соотношений:

(1) $p \rightarrow_{20} q =_{Df} (q \rightarrow_{28} {\sim}p) \rightarrow_{28} (p \rightarrow_{28} q)$,

$$(2)\ p \to_{28} q =_{Df} {\sim}((\sim q \to_{20} \sim p) \to_{20} {\sim}(p \to_{20} q)).$$

Далее покажем, что логика со связками $\sim$, $\to_{20}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\to_{22}$. Это справедливо в силу следующих соотношений:

$$(1)\ p \to_{22} q =_{Df} (\sim p \to_{20} \sim q) \to_{20} (p \to_{20} q),$$

$$(2)\ p \to_{20} q =_{Df} (q \to_{22} \sim p) \to_{22} (p \to_{22} q).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9. Посредством множества связок $\{\sim, \to_i\}$ $(1 \leq i \leq 16)$ выразим J_1-оператор.

Доказательство.

$$J_1(p) =_{Df} {\sim}(p \to_i \sim p), \text{ где } 1 \leq i \leq 16.$$

Расширения $\mathbf{K_3}$

Последовательно опишем все импликативные расширения $\mathbf{K_3}$. Напомним, $\mathbf{K_3}$ есть логика с исходным множеством связок $\{\sim, \vee, \wedge\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.10. Расширение $\mathbf{K_3}$ посредством добавления импликации $\to_i$ $(1 \leq i \leq 16)$ есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$.

Доказательство. Напомним, в нашем обозначении логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$ есть логика с исходными связками $\sim$ и $\to_3$.

Покажем, что логика со связками $\sim$ и $\to_3$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\to_i$ $(1 \leq i \leq 16)$.

Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł_3}$[16], с другой стороны, в силу того, что в каждой из 16 систем со связками $\{\sim, \vee, \wedge, \to_i\}$ $(1 \leq i \leq 16)$ выразима импликация $\to_3$. Последнее обоснуем так. Расширение множества связок $\{\sim, \vee, \wedge\}$ посредством J_0-оператора есть трехзначная логика Лукасевича. Это очевидно, если принять во внимание

[16] Следствием теоремы В.К.Финна о функциональной предполноте $\mathbf{Ł_3}$ является утверждение о том, что любая трехзначная связка, ограничение которой на множестве истинностных значений $\{0,1\}$ есть классическая связка ($\mathbf{C}$-расширяющая), может быть определена посредством связок $\mathbf{Ł_3}$. Таким образом, очевидно, посредством связок $\mathbf{Ł_3}$ можно выразить любую импликацию $\to_i$ $(1 \leq i \leq 16)$.

a) в $\mathbf{Ł_3}$ определимы все J_i-операторы;

b) определение импликации Лукасевича (в нашем обозначении $\rightarrow_3$) в работе [63]:

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} (\sim p \vee q\ ) \vee \sim J_0\ (\sim p \wedge q\ ).$$

Таким образом, достаточно посредством множества связок $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_i\}$ $(1 \leq i \leq 16)$ определить J_0-оператор. А это имеет место в силу ранее доказанного утверждения 2.9, а также соотношений:

$$J_1(p) =_{Df} J_0(\sim p) \text{ и } J_0(p) =_{Df} J_1(\sim p).$$

Итак, утверждение 2.10 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11. Расширение $\mathbf{K_3}$ посредством $\rightarrow_i$ $(i \in \{17,18\})$ есть логика **PCont**.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_i$ $(i \in \{17,18\})$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{21}$.

В работе [33] доказано, что логика **PCont** функционально эквивалентна логике **RM3**, т. е. в нашем обозначении логики со множествами связок $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{21}\}$ и $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{25}\}$ функционально эквивалентны.

Доказательство утверждения 2.11 следует из вышесказанного, а также ранее обоснованных утверждений 2.5 и 2.6.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.12. Расширение $\mathbf{K_3}$ посредством $\rightarrow_i$ $(i \in \{19, 20, 22, 26, 27, 28\})$ есть логика **PCont**.

Доказательство. В силу ранее доказанных утверждений 2.7 и 2.8, для доказательства утверждения 2.12 достаточно показать, что:

(1) логика с множеством исходных связок $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{19}\}$ функционально эквивалентна логике со множеством связок $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{20}\}$;

(2) логика со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{19}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{18}$. (Последняя в силу утверждения 2.11 есть логика **PCont**.)

Итак, (1) имеет место, т. к.

$$p \to_{19} q =_{Df} (p \to_{20} q\,) \vee q\,,$$

$$p \to_{20} q =_{Df} (p \vee \sim p) \vee (p \to_{20} q\,).$$

(2) справедливо, т. к.:

$$p \to_{19} q =_{Df} (q \to_{18} p) \to_{18} (p \to_{18} q\,) \text{ и}$$

$$p \to_{18} q =_{Df} ((p \to_{19} q\,) \wedge p) \to_{19} (p \wedge \sim q\,).$$

Таким образом, утверждение 2.12 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.13. Расширение $\mathbf{K_3}$ посредством $\to_i$ ($i \in \{23,24\}$) есть логика **PCont**.

Доказательство. Для доказательства утверждения 2.13 достаточно показать, что:

(1) логика со связками ~, ∨, ∧, $\to_{23}$ функционально эквивалентна логике со связками ~, ∨, ∧, $\to_{24}$.

(2) логика со связками ~, ∨, ∧, $\to_{23}$ функционально эквивалентна логике со связками ~, ∨, ∧, $\to_{21}$(**PCont**).

(1) справедливо в силу следующих соотношений:

$$p \to_{23} q =_{Df} (p \to_{24} q) \vee q \text{ и}$$

$$p \to_{24} q =_{Df} (p \to_{23} q) \wedge (p \vee \sim p).$$

(2) справедливо в силу соотношений:

$$p \to_{23} q =_{Df} (p \to_{21} q\,) \wedge (q \vee \sim q\,) \text{ и}$$

$$p \to_{21} q =_{Df} (p \to_{23} q\,) \vee \sim(q \to_{23} (p \wedge (\sim q \wedge q))).$$

Итак, утверждение 2.13 доказано.

Таким образом, при рассмотрении расширений сильной регулярной логики Клини $\mathbf{K_3}$ посредством класса *естественных* импликаций получили, с одной стороны, *класс логик, по функциональным свойствам эквивалентных логике Лукасевича* $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, *класс систем, функционально эквивалентных логике* **PCont.**

Таблица разбиений всех 28 импликаций на классы выглядит следующим образом:

$Ł_3$	**PCont**
$\to_i$ $(1 \le i \le 16)$	$\to_i$ $(17 \le i \le 28)$

Заметим, что расширение **PCont** константой 1 приводит к другой известной паранепротиворечивой логике $\mathbf{J_3}$ [37], которая по функциональным свойствам есть $Ł_3$[17]. Тогда логику $\mathbf{K_3}$ и ее расширения можно представить так:

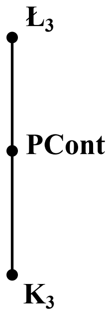

Рис. 1. Логика $\mathbf{K_3}$ и ее импликативные расширения

Расширения $\mathbf{K}_3^{\to}$

Последовательно рассмотрим все импликативные расширения логики $\mathbf{K}_3^{\to}$. Напомним, промежуточная регулярная логика **Lisp** есть логика с исходным множеством связок $\{\sim, \vee^{\to}, \wedge^{\to}\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.14. Расширение $\mathbf{K}_3^{\to}$ посредством добавления импликации $\to_i$ $(1 \le i \le 16)$ есть трехзначная логика Лукасевича $Ł_3$.

Доказательство. Напомним, в нашем обозначении логика Лукасевича $Ł_3$ есть логика с исходными связками $\sim$ и $\to_3$.

Покажем, что логика со связками $\sim$ и $\to_3$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\vee^{\to}$, $\wedge^{\to}$, $\to_i$ $(1 \le i \le 16)$.

[17] См. [7, с. 47, 74].

Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, в силу того, что в каждой из 16 систем со связками $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_i\}(1 \leq i \leq 16)$ выразима импликация $\rightarrow_3$. Последнее очевидно имеет место, если принять во внимание следующее:

a) расширение $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ посредством любого из трех J_i-операторов представляет собой трехзначную логику Лукасевича, это было показано нами в [18];
b) ранее доказанное утверждение 2.9.

Таким образом, утверждение 2.14 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.15. Расширение $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{17, 18, 21, 25\}$) есть логика **PCont**.

Доказательство. В силу ранее доказанных утверждений 2.5 и 2.6, а также утверждений о том, что расширение $\mathbf{K_3}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{17, 18, 21, 25\}$) есть логика **PCont**, и учитывая, что $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \subset \mathbf{K_3}$, для доказательства утверждения 2.15 достаточно посредством каждого множества связок $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_{21}\}$ и $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_{25}\}$ определить сильную регулярную дизъюнкцию $\vee$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee q =_{Df} (\sim q \rightarrow_{21} p) \vee^{\rightarrow} (\sim p \rightarrow_{21} q) \text{ и}$$
$$p \vee q =_{Df} ((\sim p \rightarrow_{25} q) \vee^{\rightarrow} p) \vee^{\rightarrow} q.$$

Утверждение 2.15 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.16. Расширение $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{19, 20, 22, 26, 27, 28\}$) есть логика **PCont**.

Доказательство. В силу ранее доказанных утверждений 2.7 и 2.8, а также утверждений о том, что расширение $\mathbf{K_3}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{19, 20, 22, 26, 27, 28\}$) есть логика **PCont**, и учитывая, что $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \subset \mathbf{K_3}$, для доказательства утверждения 2.16 достаточно посредством каждого множества связок, например, $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_{20}\}$ и $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_{27}\}$ определить сильную регулярную дизъюнкцию $\vee$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee q =_{Df} ((p \rightarrow_{20} \sim q) \vee^{\rightarrow} q) \rightarrow_{20} (p \vee^{\rightarrow} q) \text{ и}$$

$$p \vee q =_{Df} ((\sim p \rightarrow_{27} q) \vee^{\rightarrow} p) \vee^{\rightarrow} q.$$

Утверждение 2.16 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.17. Расширение $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ посредством импликации $\rightarrow_{23}$ функционально эквивалентно расширению $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ посредством импликации $\rightarrow_{24}$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

(1) $p \rightarrow_{23} q =_{Df} q \vee^{\rightarrow}(p \rightarrow_{24} q)$ и

(2) $p \rightarrow_{24} q =_{Df} ((p \rightarrow_{23} q) \wedge^{\rightarrow} p) \vee^{\rightarrow}(p \rightarrow_{23} q)$.

Утверждение 2.17 доказано.

Далее, определим, что представляет с функциональной точки зрения логика со связками $\sim$, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\rightarrow_{23}$. Ранее было показано (утверждение 2.13), что логика со связками $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow_{23}$ есть логика **PCont.** Тогда, учитывая, что $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \subset \mathbf{K_3}$, можем утверждать, что логика со связками $\sim$, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\rightarrow_{23}$ функционально вложима в логику **PCont**. Однако мы не можем говорить о функциональной эквивалентности этих логик, поскольку если бы это имело место, то посредством множества связок $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_{23}\}$ была бы выразима, например, импликация $\rightarrow_{25}$ или, что аналогично, дизъюнкция $\vee_{25}$ (где $p \vee_{25} q = \sim p \rightarrow_{25} q$). Приведем таблицу истинности для $\vee_{25}$:

$\vee_{25}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	0	0

Дизъюнкция $\vee_{25}$ коммутативна: $1 \vee_{25} {}^1/_2 = 1$ и ${}^1/_2 \vee_{25} 1 = 1$. Подобную дизъюнкцию посредством связок $\sim$, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\rightarrow_{23}$ определить невозможно в силу их некоммутативности[18]. Подобное рассуждение дает основание для следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.18. Расширение $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{23, 24\}$) не является функционально эквивалентным логике **PCont**[19].

Обозначим логику со связками $\sim$, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\rightarrow_{23}$ (а также функционально эквивалентные ей логики) как $\mathbf{T^2}$.

Таким образом, при рассмотрении расширений промежуточной регулярной логики Клини $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ посредством класса *естественных* импликаций получили, три класса логик: с одной стороны, *класс логик, по функциональным свойствам эквивалентных логике Лукасевича* $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, *класс систем, эквивалентных логике* **PCont**, а также *класс логик, эквивалентных логике* $\mathbf{T^2}$.

Таблица разбиений всех 28 импликаций на классы выглядит так:

$\mathbf{Ł_3}$	**PCont**	$\mathbf{T^2}$
$\rightarrow_i$ $(1 \leq i \leq 16)$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{17,18,19,20,21,22,25,26,27,28\})$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{23,24\})$

[18] Очевидно, логика со связками $\sim$, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\rightarrow_{23}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\vee_{23}$ (где $p \vee_{23} q = \sim p \rightarrow_{23} q$). Дизъюнкция $\vee_{23}$, так же как и связки $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, является некоммутативной.

$\vee_{23}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	$^1/_2$	0

[19] Интересно заметить, наши результаты о функциональной вложимости, эквивалентности, отсутствии функциональной вложимости, эквивалентности трехзначных логик были подтверждены А.А.Владимировым алгоритмическим путем с помощью компьютерной программы. (В апреле 2010 г. описанные в данной главе результаты обсуждались на научно-исследовательском семинаре сектора логики Института философии РАН.)

Таким образом, расширения $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ можно представить так:

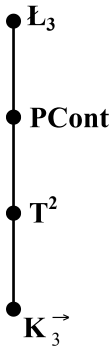

Рис. 2. Логика $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и ее импликативные расширения

Расширения $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$

Рассмотрим все импликативные расширения логики $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$. Напомним, $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ есть логика с исходным множеством связок $\{\sim, \cup, \cap\}$.

Учитывая ранее доказанное утверждение 2.2, а также тот факт, что логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$ есть логика с исходными связками $\sim$ и $\rightarrow_3$, очевидно, что расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством добавления импликации $\rightarrow_i$ ($i \in \{3, 12\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$.

Для дальнейшего исследования нам потребуется следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.19. Расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством добавления J_1-оператора или J_0-оператор есть логика $\mathbf{B_3}$.

Доказательство. Напомним, в связи с проблемой анализа логических антиномий Д.А.Бочвар [2] построил трехзначную логику $\mathbf{B_3}$, которая имеет следующие исходные связки $\sim$, $\cap$, $\vdash$, где $\sim$ и $\cap$ определяются так же как в слабой логике Клини $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$, а функция $\vdash$ называется внешним утверждением и есть не что иное, как J_1-оператор. Таким образом, учитывая, что

$$J_1(p) =_{Df} J_0(\sim p) \text{ и } J_0(p) =_{Df} J_1(\sim p),$$

утверждение 2.19 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.20. Расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{4, 5, 7\}$) есть логика $\mathbf{B_3}$.

Доказательство. В работе [23, с. 401] показано, что логика со связками $\sim, \cup, \cap, \rightarrow_5$ есть $\mathbf{B_3}$.

Тогда, учитывая ранее доказанные утверждение 2.3, 2.9, 2.19, для доказательства утверждения 2.20 достаточно показать, что логика со связками $\sim, \cup, \cap, \rightarrow_4$ функционально вложима в логику со связками $\sim, \cup, \cap, \rightarrow_5$. Это следует из соотношения:

$$p \rightarrow_4 q =_{Df} (p \rightarrow_5 q) \cap ({\sim}q \rightarrow_5 {\sim}p).$$

Утверждение 2.20 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.21. Расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 28\}$) есть логика **PCont**.

Доказательство. В силу ранее доказанных утверждений 2.6, 2.7 и 2.8, а также утверждений о том, что расширение $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 28\}$) есть логика **PCont**, и учитывая тот факт, что $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}} \subset \mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, для доказательства утверждения 2.21 достаточно посредством каждого множества связок, например, $\{\sim, \cup, \cap, \rightarrow_{19}\}$, $\{\sim, \cup, \cap, \rightarrow_{20}\}$ и $\{\sim, \cup, \cap, \rightarrow_{21}\}$ определить регулярную дизъюнкцию $\vee^{\rightarrow}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{\rightarrow} q =_{Df} ((p \rightarrow_{19} q) \cap ({\sim}q \rightarrow_{19} p)) \cup p,$$

$$p \vee^{\rightarrow} q =_{Df} ({\sim}p \rightarrow_{20} q) \cup p,$$

$$p \vee^{\rightarrow} q =_{Df} ({\sim}p \rightarrow_{21} q) \cup p.$$

Утверждение 2.21 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.22. Расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством добавления импликации $\rightarrow_i$ ($i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\sim$ и $\rightarrow_3$ ($\mathbf{Ł_3}$) функционально эквивалентна логике со связками $\sim, \cup, \cap, \rightarrow_i$ ($i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\}$).

Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, в силу того, что в каждой из 10 систем со связками ~, ∪, ∩, $\rightarrow_i$ ($i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\}$) выразима импликация $\rightarrow_3$. Последнее имеет место, если принять во внимание ранее доказанные утверждения 2.1 и 2.4, а также следующие соотношения[20]:

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} (p \rightarrow_i q) \cap (\sim q \rightarrow_i \sim p), \text{ где } i \in \{1, 2\};$$

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} ((\sim q \rightarrow_i p) \cup (p \rightarrow_i \sim q)) \cap (p \rightarrow_5 q), \quad \text{где } i \in \{8, 11, 14\};$$

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} \sim(q \rightarrow_i p) \cup (p \rightarrow_5 q), \text{ где } i \in \{9, 16\};$$

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} ((\sim p \rightarrow_{10} q) \cup (q \rightarrow_{10} \sim p)) \cap (p \rightarrow_5 q).$$

Таким образом, утверждение 2.22 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.23. Расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством $\rightarrow_{24}$ функционально эквивалентно логике $\mathbf{T^2}$, т. е. логике со связками ~, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\rightarrow_i$ ($i \in \{23, 24\}$).

Доказательство. Поскольку $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}} \subset \mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и логика со связками ~, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\rightarrow_{24}$ есть логика $\mathbf{T^2}$, то для доказательства утверждения 2.23 достаточно посредством связок ~, ∪, ∩, $\rightarrow_{24}$ выразить регулярную дизъюнкцию $\vee^{\rightarrow}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{\rightarrow} q =_{Df} (\sim(\sim p \rightarrow_{24} q) \rightarrow_{24} ((q \rightarrow_{24} \sim p) \cap p)) \cup p.$$

Утверждение 2.23 доказано.

В работе [43] рассмотрены алгебраические свойства трехзначной логики бессмысленности – логики **Z**. Исходные связки логики **Z** – инволюция ~, слабая регулярная конъюнкция ∩ и дизъюнкция трехзначной логики Эббинхауза $\vee^{e}$ [38][21]. Другими словами, логи-

[20] При выражении $\rightarrow_3$ в некоторых случаях будет использована связка $\rightarrow_5$. Очевидно, в силу ранее обоснованных утверждений 2.9 и 2.19, что $\rightarrow_5$ определима посредством множества связок $\{\sim, \cup, \cap, \rightarrow_i\}$ ($i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\}$).

[21] Напомним, что логика Эббингауза $\mathbf{E_3}$ представляет собой расширение логики Бочвара $\mathbf{B_3}$ за счет добавления дизъюнкции $\vee^{e}$.

ка **Z** есть расширение слабой регулярной логики Клини посредством добавления дизъюнкции Эббинхауза. Однако это аналогично тому, что к $\mathbf{K}_3^w$ добавить импликацию $\rightarrow_{25}$, поскольку

$$p \rightarrow_{25} q =_{Df} {\sim}p \vee^{e} q.$$

Тогда, учитывая данное рассуждение, а также ранее доказанное утверждение 2.5, справедливо следующее.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.24. Расширение $\mathbf{K}_3^w$ посредством добавления импликации $\rightarrow_i$ ($i \in \{17, 25\}$) есть логика **Z**.

Возникает вопрос о соотношении логики **Z** с другими импликативными расширениями логики $\mathbf{K}_3^w$. В силу ранее доказанного утверждения 2.21, а также предложенного А.А.Солощенковым определения $\rightarrow_{25}$ посредством ~ и $\rightarrow_{21}$:

$$p \rightarrow_{25} q =_{Df} {\sim}(p \rightarrow_{21} q) \rightarrow_{21} {\sim}(q \rightarrow_{21} p),$$

можем говорить о том, что логика **Z** функционально вложима в логику **PCont**. С другой стороны, логика **PCont** не вложима в логику **Z**. Это следует из работы [43], поскольку в логике **Z** не определима сильная регулярная дизъюнкция (конъюнкция).

Далее, рассмотрим расширение $\mathbf{K}_3^w$ посредством добавления $\rightarrow_{13}$. Для удобства логику со связками ~, ∪, ∩, $\rightarrow_{13}$ обозначим $\mathbf{T^3}$.

В силу ранее доказанных утверждений 2.9 и 2.19, очевидно, что логика Бочвара $\mathbf{B_3}$ функционально вложима в логику $\mathbf{T^3}$. Однако $\mathbf{T^3}$ не вложима в $\mathbf{B_3}$: из построения нормальных форм (*I*-*J*-с.д.н.ф.)[22] для логики $\mathbf{B_3}$ [23] следует, что импликация $\rightarrow_{13}$ не определима в $\mathbf{B_3}$.

Можно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.25 Логика **Z** функционально вложима в логику $\mathbf{T^3}$.

Доказательство. Доказательство следует из соотношения:

[22] То есть любая функция $f \in B_3$ (B_3 – класс, функций, соответствующий трехзначной логике Бочвара $\mathbf{B_3}$), тождественно не равная 0, определима посредством суперпозиции x∪y, x∩y, *I*-функций ($I(x) =_{df} x \cap {\sim}x$) и *J*-функций (определение $J(x)$ дано на стр. 21), т. е. представима в виде *I*-*J*-с.д.н.ф. Это аналог совершенной дизъюнктивной нормальной формы для двузначной логики.

$$p \to_{25} q =_{Df} \sim(p \to_{13} q) \to_{13} \sim((\sim q \to_{13} \sim p) \to_{13} p).$$

Утверждение 2.25 доказано.

В то же время, $\mathbf{T}^3$ не вложима в $\mathbf{Z}$, поскольку все связки логики $\mathbf{Z}$ сохраняют значение $^1/_2$ при значении аргументов $^1/_2$, в то время как свойства импликации логики $\mathbf{T}^3$ таковы, что $^1/_2 \to_{13} {}^1/_2 = 1$.

С другой стороны, $\mathbf{T}^3$ функционально вложима в $\mathbf{Ł}_3$. Однако $\mathbf{Ł}_3$ не вложима в $\mathbf{T}^3$, в противном случае, в $\mathbf{T}^3$ была бы выразима сильная регулярная дизъюнкция $\vee$. Заметим, что $1 \vee {}^1/_2 = 1$ и $^1/_2 \vee 1 = 1$. Дизъюнкцию $\vee$ посредством связок $\sim, \cup, \cap, \to_{13}$ определить невозможно. (Связки $\sim, \cup, \cap$ сохраняют значение $^1/_2$ при значении аргументов $^1/_2$, дизъюнкция $\vee_{13}$ – некоммутативна: $1 \vee {}^1/_2 = {}^1/_2$ и $^1/_2 \vee 1 = 1$ и $^1/_2 \vee 0 = 0$ и $0 \vee {}^1/_2 = {}^1/_2$. [23]) Тот факт, что $\mathbf{Ł}_3$ не вложима в $\mathbf{T}^3$, также подтвержден А.А. Владимировым (см. ссылку 19 на стр. 45).

Далее, рассмотрим расширение $\mathbf{K}_3^w$ посредством добавления $\to_{23}$. Для удобства логику со связками $\sim, \cup, \cap, \to_{23}$ обозначим $\mathbf{T}^1$. Относительно логики $\mathbf{T}^1$ докажем утверждения 2.26-2.28.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.26. Логика $\mathbf{T}^1$ функционально вложима в логику $\mathbf{Z}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\sim, \cup, \cap, \to_{25}$ определить импликацию $\to_{23}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \to_{23} q =_{Df} (p \to_{25} q) \cup q.$$

Утверждение 2.26 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.27. Логика $\mathbf{T}^1$ функционально вложима в логику $\mathbf{T}^2$.

[23] Очевидно, логика со связками $\sim, \cup, \cap, \to_{13}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim, \cup, \cap, \vee_{13}$ (где $p \vee_{13} q = \sim p \to_{13} q$). Приведем таблицу истинности для $\vee_{13}$:

$\vee_{13}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	1
$^1/_2$	1	1	0
0	1	$^1/_2$	0

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow_{24}$ определить импликацию $\rightarrow_{23}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \rightarrow_{23} q =_{Df} (\sim(p \rightarrow_{24} q) \rightarrow_{24} (\sim q \cap q)) \cup q).$$

Утверждение 2.27 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.28. Логика $\mathbf{T}^1$ функционально вложима в логику $\mathbf{B}_3$.

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow_5$ определить импликацию $\rightarrow_{23}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \rightarrow_{23} q =_{Df} (\sim q \rightarrow_5 \sim p) \cup q.$$

Утверждение 2.28 доказано.

С другой стороны, свойства связок логики $\mathbf{T}^1$ таковы, что ни $\mathbf{Z}$, ни $\mathbf{T}^2$, ни $\mathbf{B}_3$ не вложимы в $\mathbf{T}^1$.

$\mathbf{B}_3 \not\subset \mathbf{T}^1$, поскольку знаем, что в $\mathbf{B}_3$ выразимы все J_i-операторы, с другой стороны, очевидно, что в $\mathbf{T}^1$ нет ни одного J_i-оператора.

$\mathbf{T}^2 \not\subset \mathbf{T}^1$, т.к. в противном случае, учитывая доказанные утверждения 2.27 и 2.28, получили бы, что $\mathbf{T}^2$ и $\mathbf{T}^1$ функционально эквивалентны и $\mathbf{T}^2 \subset \mathbf{B}_3$. Однако $\mathbf{T}^2 \not\subset \mathbf{B}_3$, поскольку из построения нормальных форм (I-J-с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B}_3$ [23] следует, что импликация $\rightarrow_{24}$ (импликация логики $\mathbf{T}^2$) не определима в $\mathbf{B}_3$.

$\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{T}^1$, т.к. в противном случае, учитывая доказанные утверждения 2.26 и 2.28, получили бы, что $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{T}^1$ функционально эквивалентны и $\mathbf{Z} \subset \mathbf{B}_3$. Однако $\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{B}_3$, поскольку из построения нормальных форм (I-J-с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B}_3$ [23] следует, что импликация $\rightarrow_{25}$ (импликация логики $\mathbf{Z}$) не определима в $\mathbf{B}_3$.

Итак, при рассмотрении расширений слабой регулярной логики Клини $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством класса *естественных* импликаций получили *семь* логик. Эти логики назовем *базовыми*. Таблица разбиений всех 28 импликаций на классы выглядит следующим образом:

$Ł_3$	**PCont**	$\mathbf{B}_3$	**Z**	$\mathbf{T}^1$	$\mathbf{T}^2$	$\mathbf{T}^3$
$\rightarrow_i$ $(i \in \{1,2,3,6,8,9,10,11,12,14,15,16\})$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{18,19,20,21,22,26,27,28\})$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{4,5,7\})$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{17,25\})$	$\rightarrow_{23}$	$\rightarrow_{24}$	$\rightarrow_{13}$

Представим решетку базовых трехзначных логик:

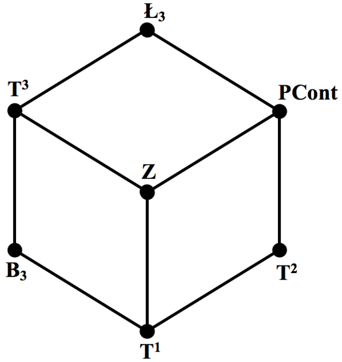

Рис. 3. Решетка базовых трехзначных логик (1)

Итак, семь *базовых* логик образуют решетку по отношению функционального вложения одной логики в другую (по отношению выразимости одного множества связок через другое). Это отношение является отношением порядка, поскольку оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. $Ł_3$ является супремумом, а $\mathbf{T}^1$ – инфимумом.

К этому стоит добавить, что свойства связок $\cup$ и $\cap$ таковы, что они образуют дистрибутивную квази-решетку (т.е. решетку без законов поглощения), а вместе со связкой ~ выполняют законы Де Моргана.

Важно отметить, что расширения $\mathbf{K}_3^w$ не образуют булеву решетку, поскольку теоретико-множественное объединение множеств связок логики $\mathbf{B}_3$ и логики $\mathbf{T}^2$ дает трехзначную логику $Ł_3$. Посредством множества связок $\{\sim, \cup, \cap, \rightarrow_5, \rightarrow_{24}\}$[24] можно определить импликацию Лукасевича ($\rightarrow_3$), например, так:

[24] Напомним, посредством связок ~, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow_5$ выразимы все J_i-операторы.

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} ((q \rightarrow_{24} J_1(p)) \cap (p \rightarrow_{24} (J_0(q) \cap J_{1/2}(q))) \cup (J_1(q) \cup J_{1/2}(q)).$$

Также решетку расширений $\mathbf{K}_3^w$ можно представить следующим образом:

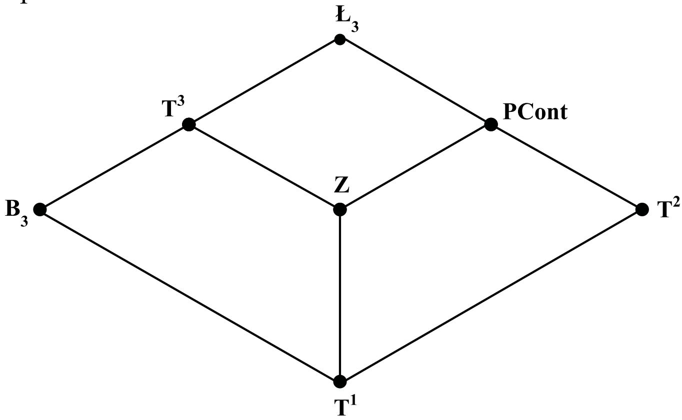

Рис. 4. Решетка базовых трехзначных логик (2)

В литературе эти решетки приводится в виде примера недистрибутивных решеток [3].

Далее, особо отметим логики $\mathbf{T}^1$, $\mathbf{T}^2$, $\mathbf{T}^3$, ранее не встречавшиеся в литературе. Они оказались *некоммутативными*, если мы стандартным образом (посредством ~ и $\rightarrow_i$ $(i \in \{23,24,13\})$) определим в них дизъюнкции.

$\mathbf{T}^1$ с функциональной точки зрения является самым слабым расширением логики $\mathbf{K}_3^w$. В работе [24] описаны 11 предполных классов логики Бочвара $\mathbf{B}_3$ и логика $\mathbf{T}^1$ является одним из них (класс всех внутренних функций).

2.3. Решетка L($\mathbf{K}_3^w$) и другие трехзначные логики

Однако возникает вопрос, почему в приведенной классификации расширений слабой регулярной логики Клини $\mathbf{K}_3^w$ отсутствуют логика Холдена $\mathbf{H}_3$ [44][25] и логика Эббинхауза $\mathbf{E}_3$ [38], в основе которых также лежит $\mathbf{K}_3^w$. На рис. 5 приведем решетку $\mathbf{L}(\mathbf{K}_3^w)$.

[25] Напомним, логику Холдена можно рассматривать как расширение $\mathbf{K}_3^w$ посредством добавления $J_{1/2}$-оператора.

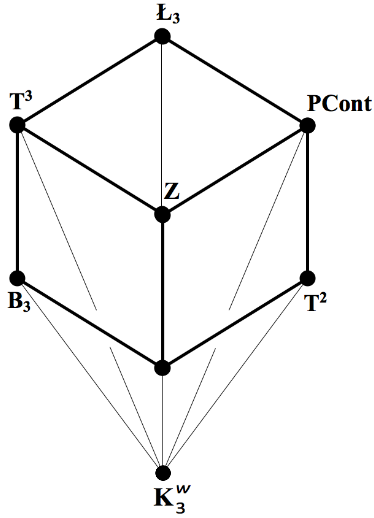

Рис. 5. Решетка $\mathbf{L}(\mathbf{K}_3^w)$

Итак, логика $\mathbf{H}_3$ отсутствует в данной классификации, поскольку не содержит ни одну из 28 *естественных* импликаций. Известно, что эта логика находится между $\mathbf{K}_3^w$ и $\mathbf{B}_3$.

Логика Эббинхауза $\mathbf{E}_3$ также не попадает в эту классификацию, поскольку содержит импликации из трех классов $\mathbf{Z}$, $\mathbf{B}_3$ и $\mathbf{T}^1$ (см. таблицу разбиений 28 импликаций) и, что важно, заменить их на одну импликацию (импликацию какого-то одного класса) нельзя, т. е. $\mathbf{E}_3$ не является импликативным расширением $\mathbf{K}_3^w$. Чтобы получить $\mathbf{E}_3$, необходимо по крайней мере *2 раза* последовательно расширить $\mathbf{K}_3^w$: сначала расширить $\mathbf{K}_3^w$ до $\mathbf{B}_3$, а затем посредством любой импликации из класса $\mathbf{Z}$ до $\mathbf{E}_3$. (Аналогичным образом можно получить, сначала расширив $\mathbf{K}_3^w$ до $\mathbf{Z}$, а затем посредством любой импликации из класса $\mathbf{B}_3$ до $\mathbf{E}_3$.)

$\mathbf{E}_3$ находится между $\mathbf{B}_3$ и $\mathbf{Ł}_3$. Интересно, что у $\mathbf{E}_3$ имеется некоммутативный напарник $\mathbf{T}^4$ (точно также как у $\mathbf{B}_3$ имеется $\mathbf{T}^2$, а у **PCont** имеется $\mathbf{T}^3$). Так же как $\mathbf{E}_3$ получается за счет расширения логики $\mathbf{B}_3$ посредством импликаций из класса $\mathbf{Z}$ (или за счет расширения логики $\mathbf{Z}$ посредством импликаций из класса $\mathbf{B}_3$), аналогичным образом логика $\mathbf{T}^4$ получается расширением логики $\mathbf{T}^2$ посредством добавления импликаций из класса $\mathbf{Z}$ (или за счет расширения логики **Z** посредством импликаций из класса $\mathbf{T}^2$). Так же как $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{T}^4$ не является импликативным расширением и непосредственно в представленную классификацию не входит.

* * *

Суммируем полученные результаты и представим импликативные расширения всех трех регулярных логик $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{w}$ следующим образом:

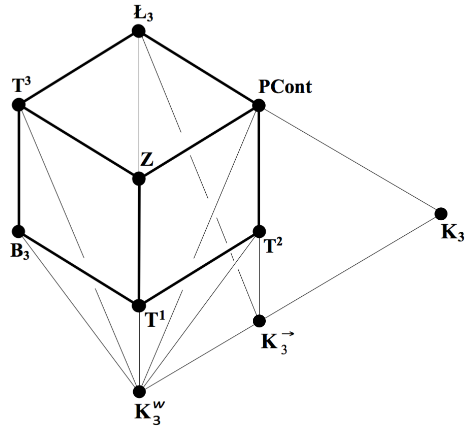

Рис. 6. Импликативные расширения регулярных логик $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{w}$

Итак, в качестве импликативных расширений регулярных логик Клини выступают 7 *базовых* логик: $\mathbf{Ł}_3$, **PCont**, $\mathbf{B}_3$, **Z**, $\mathbf{T}^3$, $\mathbf{T}^2$ и $\mathbf{T}^1$. Таким образом, установлено, что для построения логик $\mathbf{Ł}_3$ и **PCont** в качестве основания может выступать любая регулярная логика, в основе логики $\mathbf{T}^2$ может лежать или $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ или $\mathbf{K}_3^{w}$, в то время как логики $\mathbf{T}^1$, **Z**, $\mathbf{T}^3$, $\mathbf{B}_3$ появляются исключительно как импликативные расширения слабой логики Клини $\mathbf{K}_3^{w}$.

Необходимо отметить, что если под логикой понимать класс тавтологий, то во всех представленных импликативных расширениях, имеет место теорема дедукции, поскольку в каждой из 7 систем имеется такая импликация, что *K* и *S* являются тавтологиями:

K. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

S. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

ГЛАВА 3. РЕШЕТКИ *P*-ЛОГИК

Данный раздел посвятим исследованию класса *p-логик*. Нами будет введено понятие *стандартных p-логик* (от регулярных логик Клини эти логики отличаются таблицей для отрицания) и рассмотрены их импликативные расширения. Далее, используя понятие *естественной импликации*, обобщается понятие *p-логики* и рассматривается класс *естественных p-логик* и доказывается ряд полезных утверждений об их функциональной эквивалентности и вложимости. Представлена решетка *естественных p-логик*.

3.1. *P*-логики. Расширение стандартных *p*-логик

Стандартные *p*-логики

В работе [6] по аналогии с понятием *p*-алгебры и дважды *p*-алгебры вводится понятие *p*-логики и дважды *p*-логики. *P-логика* задается связками $\vee, \wedge, \rceil$, *дуальная p-логика* – связками $\vee, \wedge, \lceil$. Логика со связками $\vee, \wedge, \rceil$ и $\lceil$ есть *дважды p-логика*.

На трехзначном уровне в качестве $\vee$ и $\wedge$ имеем регулярные связки Клини (сильные $\{\vee, \wedge\}$, слабые $\{\cup, \cap\}$, промежуточные $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}\}$ или $\{\vee^{\leftarrow}, \wedge^{\leftarrow}\}$), $\rceil$ – отрицание Гейтинга и $\lceil$– дуальное ему отрицание[26].

P-логики с регулярными $\vee$ и $\wedge$ назовем *стандартными р-логиками*. Итак, имеем класс *стандартных трехзначных р-логик* (*сильная*, *слабая*, *промежуточная*)[27]. Таким образом, любая *стандартная р-логика (дуальная р-логика)* получается из соответствующей ей регулярной логики путем замены регулярного отрицания на отрицание Гейтинга (на отрицание дуальное отрицанию Гейтинга). Далее в некоторых случаях для удобства слово «стандартная» в названии *р*-логик будем опускать.

Оказалось, трехзначные *р-логики* обладают весьма необычными функциональными свойствами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Логика Лукасевича есть трехзначная сильная дважды *р*-логика.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что логика Лукасевича со связками $\sim$, $\rightarrow_3$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$ и $\lceil$. Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł_3}$. С другой стороны, посредством множества связок $\{\vee, \wedge, \rceil, \lceil\}$ выразимы связки логики Лукасевича.

В работе [35] показано, что посредством связок $\vee$, $\wedge$, $\rceil$ и $\lceil$ следующим образом можно определить отрицание Лукасевича:

$$\sim p =_{Df} \rceil p \vee (p \wedge \lceil p).$$

26 Истинностная таблица для отрицания Гейтинга приведена на странице 22, таблица истинности для дуального отрицания выглядит следующим образом:

p	$\lceil p$
1	0
½	1
0	1

27 Далее термины «сильная», «слабая», «промежуточная» в названиях стандартных *р*-логик будут указывать только на то, какие регулярные связки использованы в той или иной стандартной *р*-логике.

Посредством указанного множества связок определима также импликация Гейтинга (в нашем обозначении $\rightarrow_1$)[66]:

$$p \rightarrow_1 q =_{Df} (\rceil p \vee \rceil\rceil q) \wedge (\lceil p \vee q).$$

Учитывая, что посредством связок ~, ∨ и $\rightarrow_1$ импликация Лукасевича в работе [36] определяется так:

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} (p \rightarrow_1 q) \vee {\sim}p,$$

тогда получаем

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} ((\rceil p \vee \rceil\rceil q) \wedge (\lceil p \vee q)) \vee (\rceil p \vee (p \wedge \lceil p)).$$

Итак, утверждение 3.1. доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Промежуточная *p*-логика функционально эквивалентна промежуточной дуальной *p*-логике и представляет собой трехзначную логику Лукасевича (!).

Доказательство. Функциональная эквивалентность логик со связками $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rceil\}$ и $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \lceil\}$ следует из соотношений, приведенных автором в [18]:

$$\lceil p =_{Df} \rceil(\rceil(p \wedge^{\rightarrow} \rceil p) \vee^{\rightarrow} \rceil p),$$

$$\rceil p =_{Df} \lceil(\lceil p \wedge^{\rightarrow} \lceil p) \vee^{\rightarrow} \lceil p).$$

Для доказательства того, что промежуточная *p*-логика есть трехзначная логика Лукасевича, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł_3}$, достаточно показать, что посредством множества связок $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rceil\}$ определимы связки $\mathbf{Ł_3}$. Это было сделано автором в [17] следующим образом:

$${\sim} p =_{Df} ((p \wedge^{\rightarrow} \rceil p) \vee^{\rightarrow} \rceil p)$$

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} (\rceil({\sim}p) \wedge^{\rightarrow} (p \wedge^{\rightarrow} q)) \vee^{\rightarrow} ({\sim}(\rceil q \vee^{\rightarrow} {\sim}(p \vee^{\rightarrow} q))$$[28].

Утверждение 3.2. доказано.

---

[28] Имеется упрощение (Н.А.Знаменская):
$p \rightarrow_3 q =_{Df} (\rceil\rceil ((\rceil q \vee^{\rightarrow} p) \wedge^{\rightarrow} (\rceil p \wedge^{\rightarrow} p)) \vee^{\rightarrow} (p \wedge^{\rightarrow} \rceil p)) \vee^{\rightarrow} (\rceil p \vee^{\rightarrow} q).$

Заметим, что утверждение 3.2. сохраняет свою справедливость и в том случае, если в качестве конъюнкции и дизъюнкции для промежуточной p-логики будет взята другая пара трехзначных промежуточных регулярных связок: $\vee^{\leftarrow}$ и $\wedge^{\leftarrow}$. Это действительно так, учитывая, то, что промежуточные регулярные логики Клини **Lisp** и **Twin Lisp** функционально эквивалентны и что с помощью связок $\vee^{\leftarrow}$, $\wedge^{\leftarrow}$ и $\rceil$ выразимо отрицание $\sim$: $\sim p =_{Df} ((p \wedge^{\leftarrow} \rceil p) \vee^{\leftarrow} \rceil p)$.

Таким образом, свойство некоммутативности регулярных связок оказывается очень сильным функциональным свойством. Замена регулярного отрицания на нерегулярное приводит к принципиально иным с функциональной точки зрения взаимоотношениям между p-логиками по сравнению со взаимоотношениями, которые установлены внутри класса регулярных логик Клини. Так, по своим функциональным свойствам промежуточная p-логика значительно «сильнее» сильной p-логики.

Далее, обратимся к свойствам слабой p-логики.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Слабая p-логика функционально эквивалентна слабой дуальной p-логике и представляет собой трехзначную логику Бочвара $\mathbf{B_3}$.

Доказательство. Функциональная эквивалентность логик со связками $\{\cup, \cap, \rceil\}$ и $\{\cup, \cap, \lceil\}$ следует из соотношений:

$$\lceil p =_{Df} \rceil(\rceil(p \cap \rceil p) \cup \rceil p),$$

$$\rceil p =_{Df} \lceil(\lceil p \cap \lceil p) \cup \lceil p).$$

То, что слабая p-логика есть трехзначная логика Бочвара, следует из соотношений:

$$\sim p =_{Df} ((p \cap \rceil p) \cup \rceil p)$$

$$\vdash p =_{Df} \rceil \sim p.$$

Утверждение 3.3. доказано.

Таким образом, поскольку логика $\mathbf{B_3}$ есть слабая p-логика со связками $\cup$, $\cap$, $\rceil$, то алгебраизацию $\mathbf{B_3}$ можно представить как квази-решетку с операцией псевдодополнения.

В предыдущем разделе книги нам удалось представить наиболее известные трехзначные логики в качестве расширений регулярных логик Клини. На наш взгляд, имеет смысл также последовательно рассмотреть импликативные расширения p-логик.

Импликативные расширения стандартных *p*-логик

Рассмотрим импликативные расширения сильной p-логики (и дуальной p-логики) и слабой p-логики посредством добавления класса естественных импликаций.

Расширения сильной *p*-логики

При детальном анализе функциональных свойств логики со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, оказалось справедливым следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. В сильной p-логике функционально выразимы 10 естественных импликаций $\rightarrow_i$ ($i \in \{7, 10, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$).

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

$$p \rightarrow_7 q =_{Df} \rceil\rceil q \vee \rceil p,$$

$$p \rightarrow_{10} q =_{Df} ((\rceil p \vee q) \vee (\rceil p \wedge \rceil q)) \vee (\rceil\rceil q \vee \rceil\rceil p),$$

$$p \rightarrow_{17} q =_{Df} ((\rceil\rceil q \wedge p) \vee q) \vee \rceil p),$$

$$p \rightarrow_{18} q =_{Df} ((\rceil\rceil q \wedge p) \vee \rceil p),$$

$$p \rightarrow_{19} q =_{Df} ((\rceil\rceil q \wedge p) \vee q) \vee (\rceil p \wedge \rceil q),$$

$$p \rightarrow_{20} q =_{Df} ((\rceil p \vee q) \vee (\rceil p \wedge q)) \vee (\rceil\rceil q \wedge p),$$

$$p \rightarrow_{21} q =_{Df} \rceil p \vee q,$$

$$p \rightarrow_{22} q =_{Df} ((p \wedge q) \vee \rceil p),$$

$$p \rightarrow_{23} q =_{Df} (\rceil q \vee q) \vee (\rceil p \vee q),$$

$$p \rightarrow_{24} q =_{Df} ((p \wedge q) \vee \rceil p) \vee (\rceil q \vee q).$$

Утверждение 3.4. доказано.

В главе 1 была представлена трехзначная логика Гейтинга $\mathbf{G_3}$ со связками $\rceil$, $\Rightarrow$, $\vee$ и $\wedge$. Очевидно, что $\mathbf{G_3}$ можно рассматривать как импликативное расширение сильной p-логики за счет добавления естественной импликации $\to_1$.

Более того, можно указать целый подкласс класса естественных импликаций, расширяя посредством которых сильную p-логику мы получим логику $\mathbf{G_3}$. Об этом следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Расширение сильной p-логики посредством $\to_i$ ($i \in \{1, 8, 9, 11, 12, 13\}$) есть $\mathbf{G_3}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения необходимо показать, что логика со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_i$ ($i \in \{8, 9, 11, 12, 13\}$) функционально эквивалента логике со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_1$.

(1) Логика со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_8$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_1$. Это следует из соотношений:

$$p \to_8 q =_{Df} ((q \to_1 p) \wedge \rceil\rceil q) \vee \rceil p$$

$$p \to_1 q =_{Df} ((q \to_8 p) \wedge \rceil\rceil q) \vee \rceil p.$$

(2) Логика со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_9$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_1$. Это следует из соотношений:

$$p \to_9 q =_{Df} ((q \to_1 p) \wedge \rceil\rceil q) \vee ((\rceil p \to_1 q) \wedge \rceil p)$$

$$p \to_1 q =_{Df} ((q \to_9 p) \wedge \rceil\rceil q) \vee \rceil p.$$

(3) Логика со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_{11}$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_1$. Это следует из соотношений:

$$p \to_{11} q =_{Df} ((q \to_1 p) \wedge (p \to_1 q)) \vee \rceil p,$$

$$p \to_1 q =_{Df} (((q \to_{11} p) \vee q) \wedge \rceil\rceil q) \vee \rceil p.$$

(4) Логика со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_{12}$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_1$. Это следует из соотношений:

$$p \to_{12} q =_{Df} ((q \to_1 p) \vee (\rceil p \vee q)) \wedge (p \to_1 q),$$

$$p \to_1 q =_{Df} ((p \to_{12} q) \vee q) \vee \rceil p.$$

(5) Логика со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_{13}$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_1$. Это следует из соотношений:

$$p \to_{13} q =_{Df} ((p \to_1 q) \wedge (\rceil p \to_1 q)) \vee (\rceil p \wedge \rceil q),$$

$$p \to_1 q =_{Df} (p \to_{13} q) \vee \rceil p.$$

Таким образом, утверждение 3.5. доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Расширение сильной p-логики посредством $\to_i$ ($i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 14, 15, 16, 25, 26, 27, 28\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$.

Доказательство. Учитывая ранее доказанное утверждение 3.1 о том, что логика с множеством связок $\{\vee, \wedge, \rceil, \lceil\}$ есть трехзначная логика Лукасевича, для доказательства утверждения 3.6 достаточно показать функциональную эквивалентность логик со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\lceil$ и $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\to_i$ ($i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 14, 15, 16, 25, 26, 27, 28\}$). Последнее справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, в силу следующих соотношений:

$$\lceil p =_{Df} (\rceil\rceil p \to_i p) \to_i \rceil p \qquad (i \in \{4, 5, 6, 14, 15, 16, 25, 26, 27, 28\});$$

$$\lceil p =_{Df} p \to_3 (p \to_3 \rceil p);$$

$$\lceil p =_{Df} p \to_2 \rceil p.$$

Утверждение 3.6 доказано.

Таким образом, при рассмотрении расширений сильной p-логики посредством класса *естественных* импликаций получили, с одной стороны, *класс логик, по функциональным свойствам эквивалентных логике Лукасевича* $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, *класс систем, функционально эквивалентных логике* $\mathbf{G_3}$**.** Кроме того, сильная p-логика содержит целый подкласс класса *естественных* импликаций.

Тогда распределение всех 28 импликаций на классы выглядит следующим образом:

$\{\vee, \wedge, \rceil\}$	$\mathbf{G_3}$	$\mathbf{Ł_3}$
10	6	12
$\underset{i}{\rightarrow}$ ($i \in \{7, 10, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$)	$\underset{i}{\rightarrow}$ ($i \in \{1, 8, 9, 11, 12, 13\}$)	$\underset{i}{\rightarrow}$ ($i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 14, 15, 16, 25, 26, 27, 28\}$)

Можно предположить, что дуальная p-логика должна обладать похожими свойствами. Однако с функциональной точки зрения логика со связками $\vee$, $\wedge$, $\rceil$ и логика со связками $\vee$, $\wedge$, $\lceil$ отличаются существенно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7. В сильной дуальной p-логике функционально выразимы две естественные импликации $\rightarrow_2$ и $\rightarrow_5$.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно привести следующие соотношения:

$$p \rightarrow_2 q =_{Df} \lceil p \vee q,$$

$$p \rightarrow_5 q =_{Df} \lceil p \vee \lceil\lceil q.$$

Утверждение 3.7 доказано.

Далее, мы знаем, что добавление к множеству связок $\{\vee, \wedge, \rceil\}$ импликации $\rightarrow_1$ дает трехзначную логику Гейтинга. Интересно, что в ряде работ [55], [56], [54] и др. в связи с исследованием немонотонных логик появляется паранепротиворечивая логика со связками $\vee$, $\wedge$, $\lceil$, $\rightarrow_1$ (в этих работах эта логика обозначается как $\mathbf{G_3}'$). В работе [55] показано, что с функциональной точки зрения $\mathbf{G_3}'$ есть $\mathbf{Ł_3}$.

Кроме того, в работе [5] появилась другая, построенная дуальным образом к $\mathbf{G_3}$, – паранепротиворечивая логика $\mathbf{D_3}$, ее исходными связками являются $\vee$, $\wedge$, $\lceil$, $\rightarrow_6$. В работе [13] показано, что $\mathbf{D_3}$ и $\mathbf{Ł_3}$ функционально эквивалентны.

В результате систематического подхода к исследованию импликативных расширений сильной дуальной p-логики со связками $\vee$, $\wedge$, $\lceil$ удалось доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.8. Расширение сильной дуальной *p*-логики посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{1, 3, 4, 6, 7, \ldots, 28\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$.

Доказательство. Учитывая ранее доказанное утверждение 3.1 о том, что логика с множеством связок $\{\vee, \wedge, \rceil, \lceil\}$ есть трехзначная логика Лукасевича, для доказательства утверждения 3.8 достаточно показать функциональную эквивалентность логик со связками $\vee, \wedge, \rceil, \lceil$ и $\vee, \wedge, \lceil, \rightarrow_i$ ($i \in \{1, 3, 4, 6, 7, \ldots, 28\}$). Последнее справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł}_3$, с другой стороны, в силу следующих соотношений:

$$\rceil p =_{Df} ((p \rightarrow_i \lceil\lceil p) \wedge \lceil p) \ (i \in \{1, 4, 7, \ldots, 28\});$$

$$\rceil p =_{Df} \lceil((p \rightarrow_j \lceil\lceil p) \rightarrow_j p) \ (j \in \{3, 6\}).$$

Утверждение 3.8 доказано.

Таким образом, в качестве импликативного расширения дуальной *p*-логики со связками $\vee$, $\wedge$, $\lceil$ посредством класса *естественных* импликаций выступает один *класс логик, по функциональным свойствам эквивалентных логике Лукасевича* $\mathbf{Ł}_3$. Кроме того, сильная дуальная *p*-логика содержит две *естественных* импликации.

Таблица разбиения 28 импликаций выглядит так:

$\{\vee, \wedge, \lceil\}$	$\mathbf{Ł}_3$
2	26
$\rightarrow_i$ ($i \in \{2, 5\}$)	$\rightarrow_i$ ($i \in \{1, 3, 4, 6, 7, \ldots, 28\}$)

Учитывая, что расширение $\mathbf{G}_3$ с помощью отрицания ~ есть $\mathbf{Ł}_3$ (см. [52, p. 146], [36, p. 9]), результаты рассмотрения импликативных расширений сильной *p*-логики и дуальной сильной *p*-логики можно представить так:

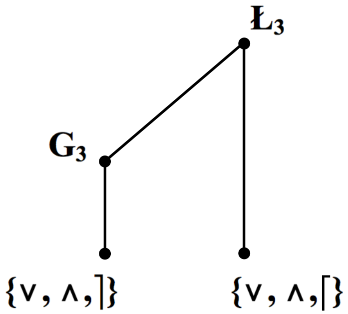

Рис. 7. Сильная *p*-логика, дуальная сильная *p*-логика и их импликативные расширения

Для наглядности представим расширения {∨, ∧}:

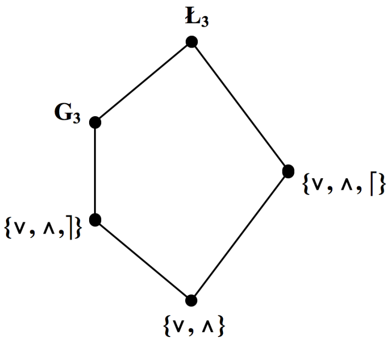

Рис. 8. Расширения {∨, ∧}

В алгебраической литературе эта решетка хорошо известна под названием «пентагон» [3, с. 87].

Расширения слабой *p*-логики

Перейдем к рассмотрению импликативных расширений слабой *p*-логики. Как было нами показано ранее, эта логика со связками ∪, ∩, ⌉ есть трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B}_3$. Напомним также, что $\mathbf{B}_3$ является одной из семи базовых логик (см. главу 2), полученных нами при рассмотрении импликативных расширений регулярных логик Клини. Таким образом, в рамках данного параграфа будем обращаться к результатам, полученным нами ранее, поскольку здесь будут рассмотрены импликативные расширения одной из базовых логик – логики $\mathbf{B_3}$.

Принимая во внимание ранее доказанное утверждение 2.20 о том, что расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{4, 5, 7\}$) есть логика $\mathbf{B_3}$, а также 2.28 о том, что логика $\mathbf{T^1}$ функционально вложима в логику $\mathbf{B_3}$, очевидно следующее утверждение[29].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.9. В слабой p-логике выразимы четыре естественные импликации $\rightarrow_i$ ($i \in \{4, 5, 7, 23\}$).

Далее, учитывая то, что $\mathbf{B_3}$ есть расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ и то, что расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{3, 12\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$, а также ранее доказанное утверждение 2.22, справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.10. Расширение слабой p-логики посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{1, 2, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$.

В предыдущей главе также нами было доказано утверждение 2.21 о том, что расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$ посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 28\}$) есть логика **PCont**. Однако, как мы уже упоминали, расширение **PCont** константой 1 приводит к логике, которая по функциональным свойствам есть $\mathbf{Ł_3}$. В то же время знаем, что в $\mathbf{B_3}$ выразима константа 1 (поскольку выразимы все J_i-операторы). Кроме того, было показано, что расширение логики Бочвара $\rightarrow_{24}$ посредством импликации дает трехзначную логику Лукасевича. Таким образом, верно

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.11. Расширение слабой p-логики посредством $\rightarrow_i$ ($i \in \{18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$.

29 Напомним, что $\mathbf{T^1}$ является расширением слабой регулярной логики Клини посредством добавления импликации $\rightarrow_{23}$.

В предыдущей главе была упомянута трехзначная логика Эббинхауза $\mathbf{E_3}$[30], однако, напомним, она не вошла в предложенную нами классификацию, поскольку содержит естественные импликации сразу двух базовых логик – $\mathbf{B_3}$ и $\mathbf{Z}$. Таким образом, очевидно, что логика $\mathbf{E_3}$ появляется здесь как расширение слабой p-логики. Таким образом, учитывая вышесказанное, а также ранее доказанное утверждение 2.5 имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.12. Расширение слабой p-логики посредством $\rightarrow_i (i \in \{17, 25\})$ есть трехзначная логика Эббинхауза $\mathbf{E_3}$.

Далее, поскольку (1) $\mathbf{K_3^w} \subset \mathbf{B_3}$; (2) $\mathbf{T^3}$ является расширением $\mathbf{K_3^w}$ посредством добавления $\rightarrow_{13}$ и (3) $\mathbf{B_3} \subset \mathbf{T^3}$ то, очевидно, что расширение слабой p-логики посредством $\rightarrow_{13}$ есть $\mathbf{T^3}$.

Итак, суммируем наши рассуждения: в качестве импликативных расширений слабой p-логики со связками $\cup$, $\cap$, $\rceil$ посредством класса *естественных* импликаций получили, с одной стороны, *класс логик, по функциональным свойствам эквивалентных логике Лукасевича* $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, *класс систем, функционально эквивалентных логике* $\mathbf{E_3}$, а также *класс логик, эквивалентных логике* $\mathbf{T^3}$. Кроме того, слабая p-логика содержит четыре *естественных* импликации.

Таблица разбиения 28 импликаций выглядит так:

$\{\cup, \cap, \rceil\}$ или $\{\cup, \cap, \lceil\}$	$\mathbf{Ł_3}$	$\mathbf{E_3}$	$\mathbf{T^3}$
4	21	2	1
$\rightarrow_i$ $(i \in \{4,5,7,23\})$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{1,2,3,6,8,9,10,11,12,14,15,16,18,19,20,21,22,24,26,27,28\})$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{17,25\})$	$\rightarrow_{13}$

Учитывая установленные взаимоотношения (см. главу 2) между логиками $\mathbf{B^3}$, $\mathbf{Ł_3}$, $\mathbf{E_3}$, $\mathbf{T^3}$, результаты рассмотрения импликативных расширений слабой p-логики можно представить следующим образом:

[30] Напомним, что $\mathbf{E_3}$ представляет собой расширение логики Бочвара посредством добавления дизъюнкции $\vee^e$, или, что аналогично, посредством импликации $\rightarrow_{25}$, т.к. $p \vee^e q = {\sim}p \rightarrow_{25} q$ и $p \rightarrow_{25} q = {\sim}p \vee^e q$.

Рис. 9. Слабая *p*-логика и ее импликативные расширения

Таким образом, отталкиваясь от исследования класса регулярных логик Клини и их расширений, были рассмотрены трехзначные *p*-логики и их импликативные расширения. Переход от регулярных логик Клини к стандартным *p*-логикам, с одной стороны, показал, что с функциональной точки зрения стандартные *p*-логики более сильные системы: если множество связок $\{\sim, \cup, \cap\}$ есть слабая логика Клини $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$, то $\{\rceil, \cup, \cap\}$ есть трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B}_3$, которая, как нами было показано в главе 2, есть импликативное расширение $\mathbf{K}_3^{\mathrm{w}}$; если множество связок $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}\}$ есть промежуточная логика Клини $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, то $\{\rceil, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}\}$ есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$, которая является функционально предполной. С другой стороны, свойства сильной *p*-логики и дуальной ей оказались иными. Так, эти логики не являются функционально эквивалентными (в то время как, промежуточная *p*-логика функционально эквивалентна дуальной ей *p*-логике, и слабая *p*-логика функционально эквивалентна дуальной ей *p*-логике) и, кроме того, одним из импликативных расширений сильной *p*-логики является трехзначная логика Гейтинга. Представить импликативные расширения стандартных *p*-логик можно следующим образом.

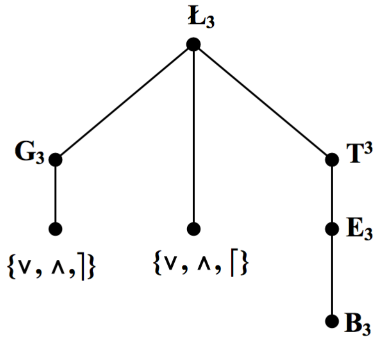

Рис. 10. Стандартные p-логики и их импликативные расширения

3.2. Обобщение понятия *p*-логики. Естественные *p*-логики

Заметим, при построении класса стандартных p-логик использовались соответствующие регулярные связки – конъюнкции и дизъюнкции. Однако, эти связки стандартным образом определимы в соответствующих регулярных логиках при помощи регулярного отрицания и регулярной импликации. Тогда в связи с тем, что нами был определен класс естественных импликаций возникает задача обобщения понятия p-логики и рассмотрения класса так называемых *естественных* p-логик.

Итак, нами был определен класс естественных импликаций. Посредством импликации следующим образом определим дизъюнкцию:

$$x \vee y =_{Df} (x \to_i y) \to_i y \ (1 \leq i \leq 28).$$

В результате получаем 18 уникальных дизъюнкций. Далее определим двойственную связку – конъюнкцию:

$$x \wedge^i y =_{Df} \sim (\sim x \vee^i \sim y) \ (1 \leq i \leq 18).$$

Таким образом, имеем 18 естественных p-логик (логик со связками $\{\vee^i, \wedge^i, \rceil\}$, где $(1 \leq i \leq 18)$) и, соответственно, 18 естественных дуальных p-логик (логик со связками $\{\vee^i, \wedge^i, \lceil\}$, где $(1 \leq i \leq 18)$). Приведем таблицы истинности, соответствующие дизъюнкциям и конъюнкциям естественных p-логик, и перенумеруем их.

$\vee^1$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	1
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge^1$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	0
0	0	0	0

$\vee^2$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge^2$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	0	0	0

$\vee^3$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge^3$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	0	0	0

$\vee^4$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	0	1
0	1	0	0

$\wedge^4$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	0	1	0
0	0	0	0

$\vee^5$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	0	0
0	1	0	0

$\wedge^5$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	1	1	0
0	0	0	0

$\vee^6$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	0	$^1/_2$
0	1	0	0

$\wedge^6$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	0
0	0	0	0

$\vee^7$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	1	1
0	1	1	0

$\wedge^7$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	0	0	0
0	0	0	0

$\vee^8$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
0	1	1	0

$\wedge^8$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	0	0	$^1/_2$
0	0	0	0

$\vee^{9}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge^{9}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	0	0

$\vee^{10}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
0	1	1	0

$\wedge^{10}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	0	0

$\vee^{11}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	1
0	1	1	0

$\wedge^{11}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	0
0	0	0	0

$\vee^{12}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	0	1
0	1	0	0

$\wedge^{12}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	0	1	$^1/_2$
0	0	0	0

$\vee^{13}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	1
$^1/_2$	1	0	1
0	1	1	0

$\wedge^{13}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	0	1	0
0	0	$^1/_2$	0

$\vee^{14}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	1
$^1/_2$	$^1/_2$	0	1
0	1	1	0

$\wedge^{14}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	0	1	$^1/_2$
0	0	$^1/_2$	0

$\vee^{15}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	1
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge^{15}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	0
0	0	$^1/_2$	0

$\vee^{16}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge^{16}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	$^1/_2$	0

$\vee^{17}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	1
0	1	0	0

$\wedge^{17}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	0
0	0	0	0

$\vee^{18}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
0	1	0	0

$\wedge^{18}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	0	0

Обратим внимание на то, что среди *естественных* p-логик присутствует p-логика со связками $\vee^3$ и $\wedge^3$. С функциональной точки зрения это есть не что иное, как сильная p-логика. Функциональные свойства сильной p-логики и дуальной ей p-логики были рассмотрены в предыдущем параграфе. Напомним, эти логики не являются функционально эквивалентными, но дважды сильная p-логика есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$.

Рассмотрим функциональные свойства полученного класса естественных p-логик, а также выясним, какие известные трехзначные логики им соответствуют.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.13. Естественные p-логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где ($1 \le i \le 18$ и $i \ne 3$), функционально эквивалентны.

Доказательство. Функциональная эквивалентность логик со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где ($1 \le i \le 18$ и $i \ne 3$) следует из следующих соотношений (1)-(3):

(1) $i \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$\lceil p =_{Df} \rceil (p \wedge^i \rceil\rceil p)$,

$\rceil p =_{Df} \lceil (p \vee^i \lceil\lceil p)$;

(2) $i \in \{2, 5\}$

$\lceil p =_{Df} \rceil ((p \vee^i \rceil p) \wedge^i \rceil\rceil p)$,

$\rceil p =_{Df} \lceil ((p \wedge^i \lceil p) \vee^i \lceil\lceil p)$;

(3) $\lceil p =_{Df} \rceil (p \vee^6 \rceil p)$,

$\rceil p =_{Df} \lceil (p \wedge^6 \lceil p)$.

Утверждение 3.13 доказано.

Таким образом, поскольку логики со связками $\vee^i$, $\wedge^i$, $\rceil$ и $\vee^i$, $\wedge^i$, $\lceil$, где ($1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3$), функционально эквивалентны, достаточно будет рассмотреть логики со связками $\vee^i$, $\wedge^i$, $\rceil$.

Далее, для дальнейшего исследования нам понадобится следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.14. В естественных p-логиках со связками $\vee^i$, $\wedge^i$, $\rceil$, где $i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18\}$, выразимо отрицание $\sim$.

Доказательство. В силу ранее доказанного утверждения 3.13 доказательство утверждения 3.14 следует из соотношений (1)-(4):

(1) $i \in \{1, 2, 9, 15, 16\}$

$\sim p =_{Df} \lceil p \wedge^i (\rceil p \vee^i p)$;

(2) $i \in \{8, 10, 12, 14, 18\}$

$\sim p =_{Df} (p \vee^i \lceil p) \wedge^i \rceil p$;

(3) $\sim p =_{Df} (p \vee^6 \rceil p) \wedge^6 \lceil p$;

(4) $\sim p =_{Df} \rceil p \wedge^{13} (\lceil p \vee^{13} p)$.

Утверждение 3.14 доказано.

Перейдем к рассмотрению взаимоотношений между естественными p-логиками.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.15. P-логики со связками $\vee^i$, $\wedge^i$, $\rceil$ ($i \in \{4, 5, 7\}$) попарно функционально эквивалентны.

*Доказательство.*При доказательстве будем учитывать ранее доказанное утверждение 3.13.

Сначала покажем эквивалентность логик со связками $\vee^5$, $\wedge^5$, $\rceil$ и $\vee^7$, $\wedge^7$, $\rceil$. Это верно, в силу следующих соотношений:

(1) $p \vee^7 q =_{Df} \rceil\rceil p \vee^5 \rceil\rceil q$,

$p \wedge^7 q =_{Df} (p \vee^5 p) \wedge^5 (q \vee^5 q)$;

$$(2)\ p \vee^5 q =_{Df} \lceil\lceil p \vee^7 \lceil\lceil q,$$

$$p \wedge^5 q =_{Df} (p \vee^7 p) \wedge^7 (q \vee^7 q).$$

Далее покажем, что логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \rceil$ функционально эквивалентна логике со связками и $\vee^4, \wedge^4, \rceil$.

Это справедливо, в силу следующих соотношений:

$$(1)\ p \vee^7 q =_{Df} \rceil\rceil p \vee^4 \rceil\rceil q,$$

$$p \wedge^7 q =_{Df} (p \vee^4 p) \wedge^4 (q \vee^4 q);$$

$$(2)\ p \vee^4 q =_{Df} ((\rceil q \wedge^7 \rceil\rceil p) \vee^7 \lceil\lceil q) \vee^7 \lceil\lceil p,$$

$$p \wedge^4 q =_{Df} ((\rceil\rceil q \wedge^7 \lceil q) \wedge^7 \rceil\rceil p) \vee^7 (p \wedge^7 q).$$

Таким образом, утверждение 3.15 доказано.

Заметим, что паранепротиворечивая логика $\mathbf{P}^1$ в нашем обозначении есть логика с исходными связками $\lceil$ и $\to_7$. Оказалось, $\mathbf{P}^1$ можно представить в терминах *естественных* p-логик.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.16. Логика $\mathbf{P}^1$ есть p-логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \lceil$.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\lceil$ и $\to_7$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^7, \wedge^7, \lceil$. Это справедливо, поскольку имеют место следующие соотношения:

$$(1)\ p \vee^7 q =_{Df} (p \to_7 q) \to_7 q),$$

$$p \wedge^7 q =_{Df} \lceil(\lceil\ \lceil p \to_7\ \lceil q) \text{ или } p \wedge^7 q = \lceil(\lceil p \vee^7 \lceil q);$$

$$(2)\ p \to_7 q =_{Df} (\lceil(p \vee^7 p)) \vee^7 (q \vee^7 q).$$

Утверждение 3.16 доказано.

В работе [61] исследуется так называемая трехзначная *параполная* логика $\mathbf{I}^1$, дуальная к $\mathbf{P}^1$. Эта логика с одним выделенным значением и в нашем обозначении это логика с исходными связками $\wedge$ и $\to_5$. Как и $\mathbf{P}^1$, логика $\mathbf{I}^1$ представима в терминах *естественных* p-логик.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.17. Логика $\mathbf{I}^1$ есть p-логика со связками $\vee^5, \wedge^5, \rceil$.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\rceil$ и $\to_5$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^5, \wedge^5, \rceil$. Это справедливо, поскольку имеют место следующие соотношения:

$$(1)\ p \vee^5 q =_{Df} ((p \to_5 q) \to_5 q),$$

$$p \wedge^5 q =_{Df} \rceil(\rceil\rceil p \to_5 \rceil q) \text{ или } p \wedge^5 q = \rceil(\rceil p \vee^5 \rceil q);$$

$$(2)\ p \to_5 q =_{Df} (\rceil(p \vee^5 p)) \vee^5 (q \vee^5 q).$$

Утверждение 3.17 доказано.

Таким образом, следствием доказанных утверждений 3.15-3.17, является тот факт, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, ранее рассматриваемые в литературе исключительно как дуальные по отношению друг к другу и совершенно различные, с функциональной точки зрения представляют собой одну и ту же логику.

В статье [48] указано, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ являются *комбинацией* двух изоморфов[31] классической логики $\mathbf{C}_2$, содержащихся в $\mathbf{B}_3$, однако, поскольку эти логики функционально эквивалентны, справедливо говорить о том, что логика $\mathbf{P}^1(\mathbf{I}^1)$ *содержит* два изоморфа классической логики $\mathbf{C}_2$.

Далее, рассмотрим другой класс естественных p-логик. Для удобства обозначим p-логику со связками $\vee^8, \wedge^8, \rceil$ как логику $\mathbf{T}^7$. Тогда можем указать целый класс p-логик, эквивалентных $\mathbf{T}^7$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.18. P-логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ ($i \in \{1, 2, 6, 10, 12, 13, 18\}$) функционально эквивалентна логике $\mathbf{T}^7$.

Доказательство. Учитывая ранее доказанное утверждение 3.14 и определение конъюнкции в p-логике, при доказательстве эквивалентности соответствующих p-логик достаточно показать взаимовыразимость дизъюнкций соответствующих p-логик. При доказательстве также будем учитывать следствие из доказанного утверждения 3.13, т. е. тот факт, что в p-логиках со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ ($1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3$) выразимо отрицание $\lceil$.

[31] Адаптируя терминологию Д.А.Бочвара [2] к языку настоящей работы, под трехзначным изоморфом $\mathbf{C}_2$ понимается фрагмент трехзначной логики по классу тавтологий, совпадающий с $\mathbf{C}_2$. Подробно об изоморфах см. [4].

a) Покажем, что p-логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ ($i \in \{10, 12, 13, 18\}$) и логика $\mathbf{T}^7$ функционально эквивалентны. Это имеет место в силу соотношений:

(1) $p \vee^{10} q =_{Df} p \vee^8 \rceil\rceil q$,

$p \vee^8 q =_{Df} ((p \vee^{10} \lceil\lceil q) \vee^{10} \rceil\rceil q)$;

(2) $p \vee^{18} q =_{Df} p \vee^8 ((\rceil\rceil q \wedge^8 \rceil\rceil p) \vee^8 \lceil\lceil q)$,

$p \vee^8 q =_{Df} (p \vee^{18} \lceil\lceil q) \vee^{18} \rceil\rceil q)$;

(3) $p \vee^{12} q =_{Df} ((p \vee^8 q) \wedge^8 (\rceil q \vee^{18} \lceil\lceil p)) \vee^8 \lceil\lceil q$,

$p \vee^8 q =_{Df} (p \vee^{12} q) \vee^{12} \rceil\rceil q$;

(4) $p \vee^{12} q =_{Df} \lceil\lceil q \vee^{13} ((q \vee^{13} p) \wedge^{13} (\rceil q \vee^{13} \lceil\lceil p))$,

$p \vee^{13} q =_{Df} (q \vee^{12} p) \vee^{12} (p \vee^{12} q)$.

b) Далее покажем, что p-логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ ($i \in \{1, 2, 6\}$) и логика $\mathbf{T}^7$ функционально эквивалентны. Это имеет место в силу соотношений:

(1) $p \vee^1 q =_{Df} (\rceil\rceil p \wedge^2 \rceil q) \vee^2 (p \vee^2 q)$,

$p \vee^2 q =_{Df} (\lceil\lceil p \vee^1 \rceil\rceil q) \wedge^1 (p \vee^1 q)$;

(2) $p \vee^2 q =_{Df} q \vee^6 (p \vee^6 q)$,

$p \vee^6 q =_{Df} ((q \vee^2 p) \wedge^2 (\rceil q \vee^2 \lceil\lceil q)) \vee^2 \lceil\lceil p$;

(3) $p \vee^8 q =_{Df} p \vee^6 ((\lceil q \wedge^6 \rceil\rceil p) \vee^6 (\rceil p \wedge^6 \rceil\rceil q))$,

$p \vee^6 q =_{Df} ((p \vee^8 \rceil q) \vee^8 \lceil p) \wedge^8 (\lceil\lceil q \vee^8 \lceil\lceil p)$.

Очевидно, доказательство утверждения 3.18 следует из доказанных положений (a) и (b).

Далее,

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.19. P-логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ ($i \in \{9, 14, 16\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$.

Доказательство.

a) Сначала покажем, что p-логики со связками $\vee^9, \wedge^9, \rceil$, $\vee^{14}, \wedge^{14}, \rceil$ и $\vee^{16}, \wedge^{16}, \rceil$ попарно функционально эквивалентны. Учитывая определение конъюнкции в p-логике и то, что в указанных p-логиках выразимы $\sim$ и $\lceil$ (утверждения 3.13, 3.14), доказательство положения а) следует из соотношений (1) и (2):

(1) $p \vee^9 q =_{Df} (p \vee^{16} q) \vee^{16} (\rceil\rceil q \wedge^{16} \lceil p)$,

$p \vee^{16} q =_{Df} (\sim q \wedge^9 q) \vee^9 (p \vee^9 q)$;

(2) $p \vee^{16} q =_{Df} ((p \vee^{14} q) \vee^{14} (\rceil\rceil p \wedge^{14} \lceil p)) \vee^{14} q$,

$p \vee^{14} q =_{Df} ((p \vee^{16} \lceil\lceil q) \vee^{16} (q \vee^{16} \lceil\lceil p)) \wedge^{16} ((\lceil\lceil q \wedge^{16} \rceil\rceil p) \vee^{16} (\rceil q \vee^{16} \lceil p))$.

b) Докажем, что, например, p-логика со связками $\vee^{16}$, $\wedge^{16}$, $\rceil$ есть $\mathbf{Ł_3}$.

Это справедливо, с одной стороны в силу функциональной предполноты $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, в силу того, что посредством связок $\vee^{14}$, $\wedge^{14}$, $\rceil$ определима импликация логики Лукасевича (в нашем обозначении $\rightarrow_3$)[32].

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} ((\sim p \wedge^{14} q) \vee^{14} (\rceil\rceil q \vee^{14} \lceil p)).$$

Таким образом, утверждение 3.19 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.20. *P*-логики со связками $\vee^{11}$, $\wedge^{11}$, $\rceil$ и $\vee^{17}$, $\wedge^{17}$, $\rceil$ функционально эквивалентны.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

(1) $p \vee^{11} q =_{Df} p \vee^{17} (q \vee^{17} p)$,

$p \wedge^{11} q =_{Df} q \wedge^{17} (p \vee^{17} q)$;

(2) $p \vee^{17} q =_{Df} ((p \vee^{11} q) \wedge^{11} q) \vee^{11} p$,

$p \wedge^{17} q =_{Df} ((p \wedge^{11} q) \vee^{11} q) \wedge^{11} p$.

Утверждение доказано.

---

32 Для доказательства достаточно определить импликацию Лукасевича, поскольку известно, что в логике со связками $\vee^{14}$, $\wedge^{14}$, $\rceil$ выразимо отрицание Лукасевича $\sim$ (доказанное ранее утверждение 3.14).

Для удобства p-логику со связками $\vee^{11}$, $\wedge^{11}$, $\rceil$ обозначим $\mathbf{T^5}$. P-логику со связками $\vee^{15}$, $\wedge^{15}$, $\rceil$ обозначим $\mathbf{T^6}$.

Таким образом, класс естественных p-логик разбивается на *пять* подклассов: это p-логики, функционально эквивалентные логике Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$, p-логики, функционально эквивалентные логике Сетте $\mathbf{P^1}$, p-логики, функционально эквивалентные логикам $\mathbf{T^5}$ $\mathbf{T^6}$ $\mathbf{T^7}$ соответственно. Связки конъюнкции и дизъюнкции в $\mathbf{T^7}$ и $\mathbf{T^6}$ являются некоммутативными. Интересно, что для логики $\mathbf{T^5}$ получили два эквивалентных построения с некоммутативными связками ($\vee^{17}$, $\wedge^{17}$) и коммутативными ($\vee^{11}$, $\wedge^{11}$).[33]

Заметим, что таблицы для связок $\vee^{11}$, $\wedge^{11}$ логики $\mathbf{T^5}$ встречаются в работе [21], где приводится классификация трехзначных логик значения, исходя из свойств соответствующих им универсальных алгебр. Логика со связками $\vee^{11}$, $\wedge^{11}$ относится к классу слабых исчерпывающих логик значения.

В работе [24], как уже говорилось, описаны 11 предполных классов логики Бочвара $\mathbf{B_3}$ и логика $\mathbf{T^6}$ является одним из них. Заметим, с этой точки зрения, логика $\mathbf{P^1}$ есть класс всех внешних функций. Покажем, что это так.

В работе [27] В.И.Шестаков определяет штрих Шеффера γ для внешних связок $\mathbf{B_3}$

γ	1	$^1/_2$	0
1	0	0	0
$^1/_2$	0	0	1
0	0	1	1

Это множество связок он обозначает как $\mathbf{Б_1}$. Тогда докажем следующее утверждение:

33 Однако в данном случае некоммутативность связок $\vee^{17}$, $\wedge^{17}$ не является принципиальной, поскольку при значении хотя бы одного из аргументов ½ все выражение принимает классические значения 1 или 0, т. е. имеет место некоммутативность относительно классических значений 1 и 0.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.21. Логика $\mathbf{P}^1$ есть $\mathbf{Б}_{1.}$

Доказательство. Докажем функциональную эквивалентность $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{Б}_{1.}$

Очевидно, связки $\mathbf{P}^1$ есть внешние связки $\mathbf{Б}_1$, т. е. они определимы посредством штриха Шеффера γ.

Далее посредством связок логики $\mathbf{P}^1$ определим штрих Шеффера γ. Согласно ранее доказанному утверждению 3.16, логика $\mathbf{P}^1$ есть логика со связками $\vee^7$, $\wedge^7$, $\lceil$, также в $\mathbf{P}^1$ выразимо отрицание $\rceil$ (доказанное утверждение 3.13). Тогда определить штрих Шеффера можно следующим образом:

$$p \,\gamma\, q \;=_{Df} (\rceil p \wedge^7 \lceil q) \vee^7 (\lceil p \wedge^7 \rceil q).$$

Утверждение 3.21 доказано.

Здесь стоит отметить, что класс внешних связок был впервые выделен в 1938 г. Д.А.Бочваром [2]. Как только что указывалось, специально этот класс рассмотрен в [27]. Здесь же представлены нормальные формы для $\mathbf{Б}_1$. Далее в работе В.К.Финна [24] описаны все предполные классы $\mathbf{Б}_1$ – семь классов.

Далее, при изучении функциональных свойств *p*-логик, относительно логики $\mathbf{P}^1$ справедливо следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.22. $\mathbf{P}^1$ функционально вложима в некоторую *p*-логику со связками $\boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\wedge}, \rceil$, если *p*-логика обладает следующими свойствами:

(1) *p*-логика функционально эквивалентна дважды *p*-логике (т.е. в *p*-логике выразимо отрицание $\lceil$);

(2) связки $\boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\wedge}$ являются **С**-расширяющими, т. е. сохраняются классические значения, когда аргументы принимают значения из множества $\{0, 1\}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения покажем, что посредством связок $\boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\wedge}, \rceil$ выразимы связки логики $\mathbf{P}^1$. Очевидно, достаточно показать, что выразимы $\vee^7$, $\wedge^7$.

$$p \vee^7 q \;=_{Df} \rceil\rceil p \boldsymbol{\vee} \rceil\rceil q,$$

$$p \wedge^7 q \;=_{Df} \lceil\lceil p \boldsymbol{\wedge} \lceil\lceil q.$$

Утверждение 3.22 доказано.

Очевидными следствиями утверждения 3.22 являются следующие:

$$(1)\ \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{Ł}_3;\ (2)\ \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{T}^7;\ (3)\ \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{T}^6;\ (4)\ \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{T}^5.$$

Далее покажем, что логики $\mathbf{T}^5$ и $\mathbf{T}^6$ функционально независимы, т. е. $\mathbf{T}^5 \not\subset \mathbf{T}^6$ и $\mathbf{T}^6 \not\subset \mathbf{T}^5$.

$\mathbf{T}^6 \not\subset \mathbf{T}^5$, т.к. согласно утверждению 3.14 в $\mathbf{T}^6$ выразимо отрицание ~, в то время как посредством связок $\mathbf{T}^5$ отрицание ~ определить невозможно[34]. С другой стороны, как было ранее упомянуто, логика $\mathbf{T}^6$ есть предполный в $\mathbf{B}_3$ класс функций. Из построения нормальных форм (I-J-с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B}_3$ [23] следует, что, например, дизъюнкция $\vee^{11}$ логики $\mathbf{T}^5$ не определима в $\mathbf{B}_3$, а значит, ее нельзя определить и с помощью связок $\mathbf{T}^6$. Таким образом, $\mathbf{T}^5 \not\subset \mathbf{T}^6$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.23. Логика $\mathbf{T}^5$ функционально вложима в логику $\mathbf{T}^7$.

Доказательство. Для доказательства достаточно, например, посредством связок $\vee^1$, $\wedge^1$, $\rceil$ определить дизъюнкцию $\vee^{11}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{11} q =_{Df} (p \vee^1 q) \vee^1 p\ .$$

Утверждение 3.23 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.24. Логика $\mathbf{T}^6$ функционально вложима в логику $\mathbf{T}^7$.

Доказательство. Для доказательства достаточно, например, посредством связок $\vee^1$, $\wedge^1$, $\rceil$ определить дизъюнкцию $\vee^{15}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{15} q =_{Df} (\rceil\rceil p \wedge^1 \rceil q) \vee^1 q\ .$$

Утверждение 3.24 доказано.

С другой стороны, свойства связок логики $\mathbf{T}^7$ таковы, что $\mathbf{T}^7$ не вложима ни в $\mathbf{T}^5$, ни в $\mathbf{T}^6$.

[34] Свойства $\vee$, $\wedge$ логики $\mathbf{T}^5$ таковы, что (1) они принимают значение ½ только в одном случае – при значении аргументов ½ ; (2) $x \vee x = x$ и $x \wedge x = x$. Таким образом, посредством связок $\vee$, $\wedge$, $\rceil$, $\lceil$ определить ~ нельзя.

$\mathbf{T}^7 \not\subset \mathbf{T}^5$, т. к. согласно утверждению 3.14 в $\mathbf{T}^7$ выразимо отрицание ~, в то время как было ранее указано, посредством связок $\mathbf{T}^5$ отрицание ~ определить невозможно.

$\mathbf{T}^7 \not\subset \mathbf{T}^6$, поскольку $\mathbf{T}^6 \subset \mathbf{B}_3$, и из построения нормальных форм (*I*-*J*-с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B}_3$ [23] следует, что, например, дизъюнкция $\vee^1$ логики $\mathbf{T}^7$ не определима в $\mathbf{B}_3$, а значит, ее нельзя определить и с помощью связок $\mathbf{T}^6$.

Далее, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł}_3$, верно, что $\mathbf{T}^7 \subset \mathbf{Ł}_3$. Однако $\mathbf{Ł}_3$ не вложима в $\mathbf{T}^7$, в противном случае, в $\mathbf{T}^7$ была бы выразима, например, сильная регулярная дизъюнкция $\vee$. Возьмем в качестве исходных связок $\mathbf{T}^7$ связки $\vee^1, \wedge^1, \rceil$.

Имеем: $0 \vee {}^1/_2 = {}^1/_2 \vee 0 = {}^1/_2 \vee {}^1/_2 = {}^1/_2$. Свойства связок $\vee^1, \wedge^1, \rceil$ таковы, что невозможно определить такую связку $\vee^x$, чтобы $0 \vee^x {}^1/_2 = {}^1/_2 \vee^x 0 = {}^1/_2$ или $1 \vee^x {}^1/_2 = {}^1/_2 \vee^x 1 = {}^1/_2$. Подобные рассуждения дают основания говорить, что $\mathbf{Ł}_3 \not\subset \mathbf{T}^7$.

Таким образом, пять *базовых р*-логик образуют решетку по отношению функционального вложения одной логики в другую:

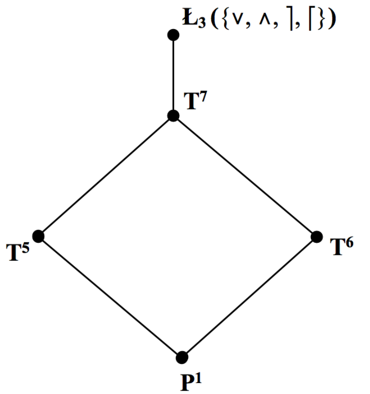

Рис. 11. Решетка естественных р-логик

Напомним, что в качестве логики $\mathbf{P}^1$ можем рассматривать любую из трех систему связок $\vee^i, \wedge^i, \rceil$ ($i \in \{4, 5, 7\}$). Заметим, что кроме $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ появилась некоммутативная функционально эквивалентная им логика со связками $\vee^4, \wedge^4, \rceil$, которую обозначим посредством $\mathbf{T}^8$.

Регулярные логики Клини, стандартные *p*-логики, естественные *p*-логики

Представляет интерес рассмотрение естественных *p*-логик в связи со стандартными *p*-логиками, а именно со слабой *p*-логикой (которая, как было нами показано, есть логика Бочвара $\mathbf{B_3}$) и регулярными логиками Клини, а именно со слабой логикой $\mathbf{K}_3^w$ (импликативным расширением которой является $\mathbf{B_3}$).

Логика $\mathbf{B_3}$ есть слабая *p*-логика $\{\rceil, \cup, \cap\}$. С другой стороны, знаем, логика $\mathbf{B_3}$ имеет два уровня и представляет собой объединение связок внешних и внутренних. И таким образом, с функциональной точки зрения $\mathbf{B_3}$ представляет собой комбинирование связок слабой регулярной логики Клини и *p*-логики.

В ходе исследования были получены два предполных класса логики $\mathbf{B_3}$ логики $\mathbf{T^1}$ и $\mathbf{T^6}$. В основе $\mathbf{T^1}$ слабая регулярная логика Клини $\mathbf{K}_3^w$, в основе $\mathbf{T^6}$ *p*-логика, по функциональным свойствам эквивалентная логике Сетте $\mathbf{P^1}$.

В результате, можно говорить, что с функциональной точки зрения, логика $\mathbf{K}_3^w$ есть логика внутреннего уровня, а логика $\mathbf{P^1}$ есть логика внешнего уровня логики $\mathbf{B_3}$.

Это можно проиллюстрировать следующим образом: приведем фрагмент решетки импликативных расширений регулярных логик Клини и фрагмент решетки естественных *p*-логик.

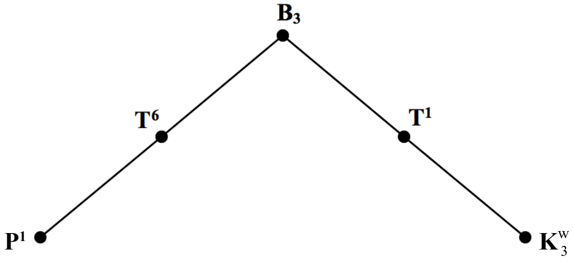

Рис. 12. Фрагмент решетки импликативных расширений регулярных логик Клини и фрагмент решетки естественных *p*-логик

Таким образом, видна взаимосвязь между таким различными структурами как регулярные логики Клини – стандартные *p*-логики – естественные *p*-логики.

Заключение

В заключение подведем итоги, остановимся на наиболее значимых результатах и наметим дальнейшую перспективу исследований.

Итак, в книге представлена своеобразная классификация трехзначных логик посредством соответствующих решеток по функциональной вложимости: были построены решетки импликативных расширений регулярных логик Клини, а также решетки *p*-логик. Эти структуры ясно демонстрируют взаимоотношения между различными трехзначными логиками.

Во второй главе мы показали, что импликативные расширения слабой регулярной логики Клини образуют семиэлементную решетку относительно свойства функциональной вложимости. И в качестве элементов решетки кроме известных и хорошо изученных логик, таких как логика Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$, логика Бочвара $\mathbf{B}_3$, паранепротиворечивая логика **PCont**, логика бессмысленности **Z**, выступают *новые* трехзначные логики $\mathbf{T}^1$, $\mathbf{T}^2$, $\mathbf{T}^3$. Особенностью этих логик является то, что они являются *некоммутативными*.

При рассмотрении импликативных расширений регулярных логик Клини показано, что класс импликативных расширений слабой логики Клини включает в себя в качестве подклассов импликативные расширения и остальных регулярных логик. Так доказано, что для построения логик $\mathbf{Ł}_3$ и **PCont** в качестве основания может выступать любая регулярная логика, в основе логики $\mathbf{T}^2$ может лежать или $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ или $\mathbf{K}_3^{w}$, в то время как логики $\mathbf{T}^1$, **Z**, $\mathbf{T}^3$, $\mathbf{B}_3$ появляются исключительно как импликативные расширения слабой логики Клини $\mathbf{K}_3^{w}$.

В третьей главе, рассматривая функциональные свойства *p*-логик, было установлено, что класс естественных *p*-логик образует пятиэлементную решетку относительно отношения функционального вложения. В качестве элементов решетки выступают трехзначные логики – логика Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$, логика Сетте $\mathbf{P}^1$, также *новые* логики $\mathbf{T}^5$, $\mathbf{T}^6$, $\mathbf{T}^7$, причем $\mathbf{T}^6$, $\mathbf{T}^7$ являются *некоммутативными*.

В ходе построения этой решетки получен ряд неожиданных результатов. В частности, тот факт, что паранепротиворечивая логика Сетте $\mathbf{P}^1$ функционально вложима в логику Д.А.Бочвара $\mathbf{B}_3$, являясь множеством всех ее внешних связок[35], явно демонстрирует связь между паранепротиворечивой логикой и логикой бессмысленностного типа $\mathbf{B}_3$ (логика анализа парадоксов).

Кроме того, было установлено, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, ранее рассматриваемые в литературе исключительно как дуальные по отношению друг к другу и совершенно различные, с функциональной точки зрения представляют собой одну и ту же логику. Кроме этого существует еще одна некоммутативная функционально эквивалентная им логика – $\mathbf{T}^8$.

Необходимо отметить, что появление новых, ранее не представленных в литературе некоммутативных логик, на наш взгляд, объясняется тем, что к трехзначным логикам был применен достаточно эффективный систематизирующий подход – *решеточный*. Таким образом, различные трехзначные логики представлены и изучены не в своем самостоятельном значении, но во взаимосвязи друг с другом.

Кроме того, комплексный подход позволил впервые выделить классы эквивалентных построений для различных трехзначных логик. Так, например, представлены многочисленные логики (множества связок), функционально эквивалентные логике Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$, впервые показано, например, что $\mathbf{Ł}_3$ может быть охарактеризована как промежуточная *p*-логика. Логика $\mathbf{B}_3$, являясь с одной стороны, импликативным расширением слабой регулярной логики Клини $\mathbf{K}_3^w$, с другой стороны, характеризуется как слабая *p*-логика, и это позволяет проследить взаимосвязь между таким различными структурами как регулярные логики Клини, стандартные *p*-логики, естественные *p*-логики. Показано, что в слабой *p*-логике комбинируются свойства, с одной стороны, слабой регулярной логики Клини $\mathbf{K}_3^w$, с другой стороны, естественной *p*-логики, которая функционально эквивалентна $\mathbf{P}^1$.

Таким образом, нами были рассмотрены функциональные свойства и отношения наиболее важных классов трехзначных систем.

На наш взгляд, предложенный анализ представляет собой некоторую основу для дальнейших более масштабных исследований в области взаимоотношения трехзначных логик. Так, определенный интерес представляет рассмотрение взаимоотношений трех-

[35] Другими словами, множество связок паранепротиворечивой логики Сетте $\mathbf{P}^1$ функционально эквивалентно множеству внешних связок логики Бочвара $\mathbf{B}_3$.

значных логик, образующих решетку импликативных расширений регулярных логик Клини, по классам тавтологий, при этом как с одним так и с двумя выделенными значениями.

Предложенное нами определение естественной импликации можно видоизменить и ослабить условие нормальности – говорить о правиле *modus ponens* относительно тавтологий, а не относительно выделенных значений.

Кроме того, наибольший интерес представляет собой снятие условия **C**-расширяемости для логических систем. В этом случае класс рассматриваемых трехзначных логик значительно увеличится и здесь уже появится функционально полная трехзначная логика Поста $\mathbf{P_3}$. Таким образом, можно будет говорить о значительно расширенной классификации трехзначных систем.

Литература

1. *Аристотель*. Об истолковании // *Аристотель*. Соч.: В 4 т. Т. 2. М., 1978.
2. *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.
3. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.:Мир, 1982.
4. *Девяткин Л.Ю*. Многозначные изоморфы классической пропозициональной логики: Кандидат. дис… кандидата филос. наук. М., 2008.
5. *Карпенко А.С.* Дуал трехзначной логики Гейтинга // Тр. научно-исслед. семинара Логического центра Ин-та философии РАН. Вып. XVII. М., 2004.С. 68–71.
6. *Карпенко А.С.* Р-логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: (Материалы X Общероссийской научной конференции, 26–28 июня 2008 г., г. Санкт-Петербург). СПб., 2008. С. 278–280.
7. *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: Изд-во ЛКИ, 2010.
8. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Изд. иностр. лит., 1957.
9. *Комендантская Е.Ю.* Функциональная взаимо-выразимость регулярных логик Клини // Логические исследования. М., 2009. С. 116–128.
10. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993, С. 190–205.
11. *Лупанов О.Б.* Конспект лекций О.Б.Лупанова по курсу «Введение в математическую логику». М.:МГУ, 2007.
12. *Розоноэр Л.И.* О выявлении противоречий в формальных теориях. I // Автоматика и телемеханика. 1983. Вып. 6. С. 113–124.
13. *Томова Н.Е.* D_3 есть на самом деле $Ł_3$ // Философия и будущее цивилизации: Тез. докл. и выступлений IV Рос. филос. конгр. (г. Москва, 24–28 мая 2005 г.): В 5 т. Т.1. М., 2005. С. 532.
14. *Томова Н.Е.* Трехзначные логики бессмысленностного типа и логика Lisp // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы IX Общерос. научн. конф. (г. Санкт-Петербург, 22–24 июня 2006 г.) СПб., 2006. С. 436–439.
15. *Томова Н.Е.* Логика Lisp и трехзначная логика Лукасевича // XIV Междунар. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». Материалы докл. М., 2007.
16. *Томова Н.Е.* Расширение логики Lisp посредством Ji-операторов // Смирновские чтения по логике: Материалы 5-й конф. (20–22 июня 2007 г.). М., 2007. С. 41–43.

17. *Томова Н.Е.* Возникновение трехзначных логик: логико-философский анализ // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 7: Философия. 2009. № 5. С. 68–74.
18. *Томова Н.Е.* О расширениях логики Lisp // 6-е Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф. (г. Москва, 17–19 июня 2009 г.). М., 2009. С. 104–106.
19. *Томова Н.Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 16. М., 2010. С. 233–258.
20. *Томова Н.Е.* Решетка импликативных расширения регулярных логик // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы XI Общерос. научн. конф. (г. Санкт-Петербург, 24–26 июня 2010 г.) СПб., 2010.
21. *Финн В.К., Аншаков О.М., Григолия Р.Ш., Забежайло М.И.* Многозначные логики как фрагменты формализованной семантики // Семиотика и информатика. 1980. Вып. 15. С. 27–60. (Пер. на англ: Many-valued logics as fragments of formalized semantics // Acta Philisophica Fennica, 35: 239–272. 1982).
22. *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я.Лукасевича // Научно-техническая информация. Сер. 2. 1969. Вып. 10. С. 35–38.
23. *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия в современном мире. Философия и логика. М., 1974. С. 398–438.
24. *Финн В.К.* О критерии функциональной полноты для B_3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М., 1974. С. 194–199.
25. *Шестаков В.И.* О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений // Успехи математ. наук. Т. 19. Вып. 2(116). 1964. С. 177–181.
26. *Шестаков В.И.* О некоторых расширениях исчислений Бочвара и Клини до функционально полных трехзначных исчислений // Научно-техническая информация. Сер. 2(12). 1967. С. 12–17.
27. *Шестаков В.И.* Об одном фрагменте исчисления Д.А.Бочвара // Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода. ВИНИТИ. Вып. 1. М., 1971.
28. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Тр. математ. ин-та им. В.А.Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
29. *Anderson A.R., Belnap N.D.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Princeton Univ. Press, 1975.
30. *Asenjo F.G., Tamburino J.* Logic of antinomies // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1975. Vol. 16. № 1. P. 17–44.

31. *Asenjo F.G.* La Idea de un Calculo de Antinomias // Seminario Matematico. Univ. Nacional de La Plata, 1953.
32. *Avron A.* On an implicational connective of RM // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1986. Vol. 27. № 2. P. 201–209.
33. *Avron A.* Natural 3-valued logics – characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. № 1. P. 276–294.
34. *Batens D.* Paraconsistent extensional propositional logics // Logique et Analyse. 1980. Vol. 23. № 90–91. P. 127–139.
35. *Cignoli R., Monteiro A.* Boolean elements in Łukasiewicz algebras. II // Proceedings of Japan Academy. 1965. Vol. 41. P. 676–680.
36. *Cignoli R.* Proper n-valued Łukasiewicz algebras as S-algebras of Łukasiewicz n-valued proposional calculi // Studia Logica. 1982. Vol. 41. № 1. P. 3–16.
37. *D'Ottaviano I.M.L., da Costa N.C.A.* Sur un probléme de Jaśkowski // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1970. 270A. P. 1349–1353.
38. *Ebbinghaus H.-D.* Über eine Prédikatenlogik mit partiell definirten Prédikaten und Funktionen // Arch. math. Logik und Grundl. 1969. 12: 39–53.
39. *Finn V.K., Grigolia R.* Nonsense logics and their algebraic properties // Theoria. 1993. Vol. LIX. Parts 1-3. P. 207–273.
40. *Fitting M.* Kleene's logic, generalized // Journal of Logic and Computation. 1992. Vol. 1. P. 799–810.
41. *Fitting M.* Kleene's three-valued logic and their children // Fundamenta Informaticae. 1994. Vol. 20. P. 113-131.
42. *Goddard L., Routley R.* The logic of significance and context. Edinburgh–London, 1973.
43. *Hałkowska K.* A note on matrices for systems of nonsens-logic // Studia Logica. 1989. Vol. 48. № 4. P. 461-464.
44. *Hallden S.* The logic of Nonsense. Uppsala, 1949.
45. *Heyting A.* Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der Preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin. 1930. Berlin. P. 42–46. (Англ. пер. в: Mancosu P. From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. Oxford, 1998).
46. *Jaśkowski S.* Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych // Studia Societatis Scientiarum Torunensis, Sectio A, 5: 57–77 (Англ. пер.: A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1967. Vol. 24. P. 143–157.).
47. *Karpenko A.S.* The classification of propositional calculi // Studia Logica. Vol. 66. № 2. P. 253–271.
48. *Karpenko A.S.* A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic // Fronties of Paraconsistent Logic. Baldock, 2000. P. 181–187.

49. *Łukasiewicz J., Tarski A.* Investigations into the sentential calculus // Łukasiewicz J. Selected Works. Amsterdam–Warszawa, 1970.
50. *Łukasiewicz J.* O logice trójwartosciowey // Ruch Filozoficzny. 1920. Vol. 5. 170-171.(English translation: On three-valued logic // Łukasiewicz J. Selected works. PWN. Warszawa, 1970. P. 87–88.)
51. *Lukyanovskaya E.* Kleene Regular Intermediate Three-Valued Logics // Proceedings of Smirnov Readings, 4th Interantional Conference. IPhRAS, 2003. P. 80–82.
52. *Moisil G.C.* Les logiques non-Chrysippiennes et leurs applications // Acta Philosopfica Fennica. Fasc. 1963. Vol. 16. P. 137–152.
53. *Monteiro A.* Construction des algèbres de Łukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques, I // Mathematica Japonica. 1967. Vol. 12. P. 1–23.
54. *Osorio M., Carballido J.L.* Brief study of G'3 logic // Journal of Applied Non-Classical Logic. 2009. Vol. 18 № 4. P. 79–103.
55. *Osorio M., Borja V., Arrazola J.* Three valued logic of Łukasiewicz for modeling semantics of logic programs // Proceedings of IBERAMIA, number 3315 in Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2004. P. 343–352.
56. *Pérez J.A.N.* Semantics for nonmonotonic reasoning: A logical approach. Master's thesis. Univ. de las Américas, Puebla, 2007.
57. *Priest G.* The logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219–241.
58. *Priest G.* The logic of paradox, revisited // Journal of Philosophical Logic. 1984. Vol. 13.
59. *Rasiowa H*. An Algebraic Approach to Non-classical Logics. Amsterdam: North-Holland, 1974.
60. *Resher N*. Many-valued logic. New York: McGraw-Hill.1969.
61. *Sette A.M., Carnielli W.A*. Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P.181–203.
62. *Sette A.M*. On propositional calculus P_1 // Mathematica Japonica. 1973. Vol. 18. № 3. P. 173–180.
63. *Slupecki E., Bryll J., Prucnal T*. Some remarks on the three-valued logic of J.Łukasiewicz // Syudia Logica. 1967. Vol. 21. P. 45–70.
64. *Sobociński B.* Axiomatization of a partial system of three-valued calculus of propositions // The Journal of Computing Systems. 1952. Vol. 11. P. 23–55.
65. *Tomova N.* A lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics // Reports on Mathematical Logic. Vol. 47. 2012. P. 173–182.
66. *Varlet J.* Considérations sur les algébres de Łukasiewicz trivalentes // Bull. Soc. Roy. Sci. Liége. 1969. Vol. 36. P. 281–290.

Научное издание

Томова Наталья Евгеньевна

Естественные трехзначные логики: функциональные свойства и отношения

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

Художник *Н.Е. Кожинова*

Технический редактор *Ю.А. Аношина*

Корректура автора

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 25.09.12.
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 6,00. Уч.-изд. л. 2,98. Тираж 500 экз. Заказ № 030.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор автора
Компьютерная верстка: *Ю.А. Аношина*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119991, Москва, Волхонка, 14, стр. 5

Информацию о наших изданиях см. на сайте Института философии:
http://iph.ras.ru/arhive.htm